١ - الصيغة الاعتيادية للعدد المركب هي $z = x + yi$ حيث $x, y \in \mathbb{R}$ وأن $\boxed{-i^2 = +1 \Leftarrow i^2 = -1 \Leftarrow i = \sqrt{-1}}$

مثلا : وان $\sqrt{-20} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1} = 2\sqrt{5}\,i$

الجزء الحقيقي للعدد المركب يرمز له $\mathrm{Re}(z) = x$ ، الجزء التخيلي يرمز له بالرمز $\mathrm{Im}(z) = y$

مثلا : $z = \dfrac{5-\sqrt{-4}}{\sqrt{-9}} = \dfrac{5-2i}{3i} = \dfrac{5-2i}{3\cancel{i}}\left(-i\cancel{i}\right) = \dfrac{5-2i}{3}(-i) = \dfrac{-5i+2i^2}{3} = \dfrac{-5i-2}{3} = \left(\dfrac{-2}{3}\right) + \left(\dfrac{-5}{3}\right)i$

يكون : $\mathrm{Re}(z) = -\dfrac{2}{3}$ and $\mathrm{Im}(z) = -\dfrac{5}{3}$ وقد استعملنا $\boxed{-i^2 = +1}$ مرتين

٢ - الرمز $\overline{z}$ يستعمل لمرافق العدد المركب ، فإذا كان $z = x + yi$ فإن $\overline{z} = x - yi$

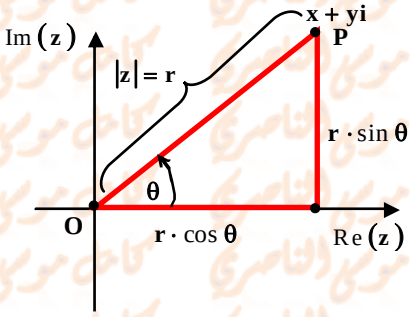
a. الشرط اللازم والكافي لترافق عددين مركبين هو $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$ and $z\cdot\overline{z} \in \mathbb{R}$

b. $z\cdot\overline{z} \in \mathbb{R}$ and $z\cdot\overline{z} = \left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2 = x^2 \oplus y^2$

c. $\|z\| = |z| = r = \sqrt{z\cdot\overline{z}} = \sqrt{x^2 \oplus y^2}$ يمثل مقياس العدد المركب لأن العدد المركب متجه

d. السعة الزاوية للعدد المركب تساوي θ وتقاس بالقياس الدائري وتكون $0 \le \theta < 2\pi$ وتعطى الرمز $Arg(z)$

ويطلق عليها ايضا بالسعة الاساسية للعدد المركب ،وتمثل قياس الزاوية التي يصنعها متجه العدد المركب $\overline{z}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، والعدد المركب z يمثل بالنقطة $P(\overline{z})$ التي تقع في المستوى المركب (مستوى اركاند) حيث P تقع على الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ حيث r هو مقياس العدد المركب ، ومن المعادلة السابقة نستنتج ما يلي:



ولمعرفة قياسات الزوايا الخاصة لـ θ يحول المتجه $\overline{z}$ الى متجه الوحدة وكما يلي :

$$\overline{U_z} = \frac{\overline{z}}{r} = \frac{(x,y)}{r} = \left(\underbrace{\frac{x}{r}}_{\cos\theta}, \underbrace{\frac{y}{r}}_{\sin\theta}\right)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

أي $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ ، $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ ومنهما نستنتج أن

$x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$

أي أن x ,y عرفا كدوال للقطب (البارامتر) θ

لذا يكون العدد z بصيغة جديدة تسمى صيغة قطبية أو باراميترية وهي كما يلي :

$$z = x + yi = r\cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow \boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

وصيغة أخرى اذكرها للإطلاع هي صيغة أيلر

$$z = r\cdot e^{i\theta}$$

بعض الزوايا الخاصة :

$$(1)\quad \alpha = \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \alpha = \frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \alpha = \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(2)\ \underbrace{\theta = 0}_{\text{لليمين}} = (1,0), \quad \underbrace{\theta = \frac{\pi}{2}}_{\text{للأعلى}} = (0,1) \qquad (2)\ \underbrace{\theta = \pi}_{\text{لليسار}} = (-1,0), \quad \underbrace{\theta = \frac{3\pi}{2}}_{\text{للأسفل}} = (0,-1) \Leftarrow$$

النقط الاربعة تقع على دائرة الوحدة وعلى احد محوري الاحداثيين

العلاقة بين α , θ في الارباع الأربعة:

في الربع الأول : $\theta = \alpha$ والإشارات $(+,+)$	في الربع الثاني : $\theta = \pi - \alpha$ والإشارات $(-,+)$
في الربع الثالث : $\theta = \pi + \alpha$ والإشارات $(-,-)$ $Or \quad \theta = -\pi + \alpha \quad if\ -\pi < \theta \le \pi$	في الربع الرابع : $\theta = 2\pi - \alpha$ والإشارات $(+,-)$ $Or \quad \theta = -\alpha \quad if\ -\pi < \theta \le \pi$

Q1. جد العدد المركب الذي سعته تساوي $\frac{5\pi}{3}$ ومقياسه يساوي 8 وحد طول

الحل \ $\alpha = \frac{\pi}{3} \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$5(60^o) = 300^o$ في الربع الرابع لذا تكون الاشارات $(+,-)$ $\Leftarrow$ $\theta = \frac{5\pi}{3} \equiv \left(+\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \overrightarrow{U_z}$

$$\therefore\quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 8\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4 - 4\sqrt{3}i$$

Q2. حول للصيغة القطبية كلا من :

$a.\ z = -8i$ $Sol\ :\ z = 0 - 8i \Rightarrow \vec{z} = (0,-8)$ $r = \lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$ $= \sqrt{0 + 64} = 8\ units$ $\overrightarrow{U_z} = \frac{\vec{z}}{r} = \frac{(x,y)}{r}$ $\Rightarrow \overrightarrow{U_z} = \frac{(0,-8)}{8} = (0,-1)$ $\Rightarrow Arg(z) = \theta = \frac{3\pi}{2}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $z = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$	$a.\ z = 8i - 8$ $Sol\ :\ z = -8 + 8i \Rightarrow \vec{z} = (-8,8) \in Q_{(ii)}$ $\Rightarrow \boxed{\theta = \pi - \alpha}$ $r = \lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$ $= \sqrt{64 + 64} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}\ units$ $\overrightarrow{U_z} = \frac{\vec{z}}{r} = \frac{(x,y)}{r}$ $\Rightarrow \overrightarrow{U_z} = \frac{(-8,8)}{8\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow Arg(z) = \theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Q3. بسط ما يأتي مستخدما مبرهنة ديموافير:

$$(a)(a)\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right)^4$$
$$=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$(b)\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3}$$
$$=\cos\frac{7\pi}{4}-i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$(d)\ Let\ \ z=1-i\Rightarrow\vec{z}=(1,-1)\in Q_4$$
$$\Rightarrow\theta=2\pi-\alpha$$
$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{U_z}=\frac{\vec{z}}{r}=\frac{(x,y)}{r}$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{U_z}=\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow Arg(z)=\theta=2\pi-\alpha=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$$
$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$
$$(z)^7=(1-i)^7=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^7$$
$$=\left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\frac{\overbrace{49\pi}^{12\pi+\pi/4}}{4}+i\sin\frac{49\pi}{4}\right)$$
$$=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=8+8i$$

$$(d)\ Let\ \ z=\sqrt{3}+i=(\ )\in Q_1\Rightarrow\theta=\alpha$$
$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=2$$
$$\overrightarrow{U_z}=\frac{\vec{z}}{r}=\frac{(x,y)}{r}$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{U_z}=\frac{(\sqrt{3},1)}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow Arg(z)=\theta=\alpha=\frac{\pi}{6}$$
$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$\Rightarrow z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{-9}=(z)^{-9}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-9}$$
$$=(2)^{-9}\left(\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{(0,-1)}-i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{512}(0+i)=\frac{1}{512}i$$

Q4: بسط ما يأتي:

$$(a)\ \frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^3},\quad (b)\ (\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta-i\sin\theta)^4,\quad (c)\left(\sin\frac{7\pi}{6}+i\cos\frac{7\pi}{6}\right)^5$$

$$Sol.\ (a)\ \frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^3}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^9}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{10-9}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$(b)(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta-i\sin\theta)^4=(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta\oplus i\sin\theta)^{-4}=(\cos\theta+i\sin\theta)^4=\cos 4\theta+i\sin 4\theta$$

$$(c)\left(\sin\frac{7\pi}{6}+i\cos\frac{7\pi}{6}\right)^5=\left(-i^2\sin\frac{7\pi}{6}+i\cos\frac{7\pi}{6}\right)^5=\left[i\left(\cos\frac{7\pi}{6}-i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\right]^5=i^5\left(\cos\frac{7\pi}{6}-i\sin\frac{7\pi}{6}\right)^5$$

$$=i^4\bullet i\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)^{-5}=-i\left(\cos\frac{35\pi}{6}-i\sin\frac{35\pi}{6}\right)\quad;\quad\left\{\frac{35\pi}{6}=4\pi+\frac{11\pi}{6}\equiv\frac{11\pi}{6}\right\}$$

$$=-i\left(\cos\frac{11\pi}{6}-i\sin\frac{11\pi}{6}\right)_{ربع\ 4}=-i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Q5 (a) باستخدام ديموافير جد الجذران التربيعيان للعدد $-1+\sqrt{3}\,i$ ، **(b)** ثم جد الجذرين بالطريقة الاعتيادية.

$$(a)\ Let\ \ z=-1+\sqrt{3}\,i=\left(-1,\sqrt{3}\right)\in Q_2\Rightarrow \theta=\pi-\alpha$$

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=2$$

$$\overrightarrow{U_z}=\frac{\vec{z}}{r}=\frac{(x,y)}{r}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{U_z}=\frac{\left(-1,\sqrt{3}\right)}{2}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow Arg(z)=\theta=2\pi-\alpha=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$$

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\Rightarrow z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{z}=\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^{\frac{1}{2}}=\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)\left(\cos\underbrace{\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}}_{K=0,1}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\right)$$

$$When\ \ k=0\Rightarrow\sqrt{z}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i=sq.root(2)$$

$$When\ \ k=1\Rightarrow\sqrt{z}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i=sq.root(2)$$

$$(b)\quad Let\ \sqrt{-1+\sqrt{3}\,i}=x+y\,i$$

$$()^2$$

$$\Rightarrow(x+y\,i)^2=-1+\sqrt{3}\,i$$

$$\Rightarrow\underbrace{\left(x^2-y^2\right)}_{Re(z_1)}+\underbrace{(2xy)}_{Im(z_1)}i=\underbrace{-1}_{Re(z_2)}+\underbrace{\sqrt{3}}_{Im(z_2)}i$$

$$\Rightarrow x^2-y^2=-1\ \ldots(Eq1)$$

$$2xy=\sqrt{3}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2x}\ \ \ldots.(Eq2)$$

$$Subistitute\ in\ (Eq1)$$

$$\Rightarrow x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2=-1\Rightarrow x^2-\frac{3}{4x^2}=-1$$

$$\times\left(4x^2\right)$$

$$\Rightarrow\ 4x^4+4x^2-3=0$$

$$\Rightarrow\underbrace{\left(2x^2+3\right)}_{rejected}\left(2x^2-1\right)=0$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{\pm2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\therefore\sqrt{-1+\sqrt{3}\,i}=\boxed{\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\right)}$$

$$Sqrt\ are:\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

Q7: باستخدام مبرهنة ديموافير جد الجذور التكعيبية للعدد **27 i**

$$Let\ \ z=27i=(0,27),\quad r=|z|=27\quad,,,\ \overrightarrow{U_z}=\frac{\vec{z}}{r}=\frac{(x,y)}{r}\Rightarrow\overrightarrow{U_z}=\frac{(0,27)}{27}=(0,1)\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore z=27\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow z^{\frac{1}{3}}=\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\underbrace{\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}_{k=o,1,2}\right)\ Multiplying\ N^r\ and\ D^r\ by\ 2$$

$$\Rightarrow z^{\frac{1}{3}}=3\left(\cos\frac{\pi+4k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)\ ,,,\ If\ \ k=0\Rightarrow root(1)=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

أكمل الحل.....

Q8* : باستخدام مبرهنة ديموافير جد حل المعادلة $x^3 + 1 = 0$

وقد يكون منطوق السؤال جد الجذور التكعيبية للعدد 1 - مستخدما مبرهنة ديموافير.

$$Let \quad z = -1 = (-1, 0)$$
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$
$$\overrightarrow{U_z} = \frac{\vec{z}}{r} = \frac{(-1, 0)}{1} \Rightarrow \overrightarrow{U_z} = (-1, 0) \Rightarrow \theta = \pi$$
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$
$$\sqrt[3]{z} = [\cos\pi + i\sin\pi]^{\frac{1}{3}}$$
$$= \underbrace{\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3}}_{K=0,1,2} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}$$

$$When \quad k = 0 \Rightarrow root(1) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow root(1) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$When \quad k = 1 \Rightarrow root(2) = \cos\pi + i\sin\pi$$
$$\Rightarrow root(2) = -1$$
$$When \quad k = 2 \Rightarrow root(3) = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$
$$\Rightarrow root(3) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\therefore S.S. = \left\{-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

Q8 : جد الجذور الرابعة للعدد 16- باستخدام مبرهنة ديموافير.

$$Let \quad z = -16 = (-16), \quad r = |z| = 16$$
$$\overrightarrow{U_z} = \frac{\vec{z}}{r} = \frac{(x, y)}{r} \Rightarrow \overrightarrow{U_z} = \frac{(-16, 0)}{16} = (-1, 0) \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow z = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Complete the solution please

Keys of solution	Question
$(a)\ 2 - 11i$ $(b)\ -\frac{83}{34} + \frac{25}{34}i$ $(c)\ -4 + 0i$ $(d)\ 0 + \frac{8}{25}i$ $(e)\ -\frac{1}{2} - \sqrt{3}i$ $(f)\ 4 + 0i$	**Q9: ضع بالصيغة العادية للعدد المركب كلا من** $(a)\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$, $(b)\ \frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+4i}{4+i}$, $(c)\ (1+i)^3 + (1-i)^3$, $(d)\ \frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2}$ $(e)\ \frac{-1-\sqrt{-12}}{2}$, $(f)\ (1-i)(1-i^2)(1-i^3)$, $(g)\ i^{-33} \Rightarrow i^{-33} \bullet i^{36} = i^3 = -i = 0 + (-1)i$
$(a)\ 25 + 16 = 25 - 16i^2$ $= (5 - 4i)(5 + 4i)$ $(b) 1 = \frac{25}{25} = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = ?$ $(d)\ x^2 - 3xi - 4i^2$ $= (x - 4i)(x + i)$	**Q10: حلل لحاصل ضرب عددين بصورة a+ bi بحيث ان a ,b عددين نسبيان.** $(a)\ 41$, $(b)\ 1$, $(c)\ 4x^2 + 9$, $(d)\ x^2 - 3xi + 4$
$x = 3$, $y = 3$	**Q11: جد قيمة x ,y الحقيقيتين إذا علمت بأن** $\frac{6}{x + yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ **مترافقان** $\overline{\left(\frac{3+i}{2-i}\right)} = \frac{6}{x + yi} \Rightarrow \left(\frac{3-i}{2+i}\right) = \frac{6}{x + yi} \Rightarrow (3-i)(x + yi) = 6(2+i)$ $\Rightarrow x + yi = \frac{6(2+i)}{3-i} \Rightarrow x + yi = \frac{6(2+i)}{3-i} \bullet \frac{3+i}{3+i} = \frac{6(6+2i+3i-1)}{10} \ldots$

Q12: اذا كان $z_2 = 1+i$, $z_1 = 2i-3$ فبرهن أن $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$L.H.S. = \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(-3+2i)\cdot(1+i)} = \overline{-3-3i+2i-2} = \overline{-5-i} = \boxed{-5+i}$

$R.H.S. = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{(-3+2i)} \cdot \overline{(1+i)} = (-3-2i)(1-i) = \boxed{-5+i}$

$L.H.S. = R.H.S.$

Q13: جد قيمة x , y الحقيقيتين والتي تحقق المعادلات التالية .

$(a)\ (x+2i)(y+2i)+1 = 8i$

$\Rightarrow xy + 2xi + 2yi - 4 + 1 = 8i \Rightarrow (xy) + (2x+2y)i = 3+8i$

$\text{Re}: xy = 3 \quad \ldots(1)$, $\text{Im}: 2x+2y = 8 \xrightarrow{\div(2)} x+y = 4 \quad \ldots(2)$

$(b)\ \frac{2-i}{1+i}x + \frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i} \Rightarrow \left(\frac{2-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)x + \left(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right)y = \frac{1}{\cancel{i}}\cdot(-i^{\cancel{2}})$

$\Rightarrow \frac{2-2i-i-1}{2}x + \frac{6-3i-2i-1}{5}y = -i \Rightarrow \frac{1-3i}{2}x + \frac{5-5i}{5}y = -i$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)x + (1-i)y = -i \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}xi + y - yi = -i$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right) + \left(-\frac{3}{2}x - y\right)i = 0 - i$

$\Rightarrow \text{Re}: \frac{1}{2}x + y = 0 \quad \ldots(1)$ $\quad \text{Im}: -\frac{3}{2}x - y = -1 \quad \ldots(2)$

$(c)\ \frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i} \Rightarrow \frac{y}{1+i} = \frac{x^2-4i^2}{x+2i} \Rightarrow \frac{y}{1+i} = \frac{(x-2i)\cancel{(x+2i)}}{\cancel{x+2i}}$

$\Rightarrow y = (x-2i)(1+i) \Rightarrow y = x + xi - 2i + 2 \Rightarrow (y) + (0)i = (x+2) + (x-2)i$

$\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) \Rightarrow 0 = x - 2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

$\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow y = 2 + 2 \Rightarrow \boxed{y = 4}$

$(a)\ Either\ y = 3$
$if\ x = 1$
$Or\ y = 1$
$if\ x = 3$

$(b)\ x = 1, y = -\frac{1}{2}$

Question	Keys of solution
Q14: جد الجذور التربيعية للعدد: $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$	

$Solution.\ \frac{4}{1-\sqrt{3}i} \times \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{\cancel{4}(1+\sqrt{3}i)}{\cancel{1+3}} = 1+\sqrt{3}i$; $Let\ \sqrt{1+\sqrt{3}i} = x + yi$

$\xrightarrow{(\ )^2} (x+yi)^2 = 1+\sqrt{3}i \Rightarrow \underbrace{(x^2-y^2)}_{\text{Re}(z_1)} + \underbrace{(2xy)}_{\text{Im}(z_1)}i = \underbrace{1}_{\text{Re}(z_2)} + \underbrace{\sqrt{3}}_{\text{Im}(z_2)}i$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = 1 \ldots(Eq1)$ & $2xy = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2x} \ldots(Eq2)\ Substitute\ in\ (Eq1)$

$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{4x^2} = 1 \xrightarrow{\times(4x^2)} 4x^4 - 4x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \underbrace{(2x^2+1)}_{rejected}(2x^2-3) = 0$

$x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$y = \frac{\sqrt{3}}{\pm 2\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{1+\sqrt{3}i} = \boxed{\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}$

Q 15: حل المعادلات التالية وبين أيا منها يكون جذراها مترافقين.

$(a)\ z^2 + 12 = 0$

لكل الفروع نفرض الجذرين M , L

$(b)\ z^2 - 3z + 3 + i = 0 \Rightarrow a = 1, b = -3, c = 3+i$

$M + L = 3 \in \mathbb{R}$, $M \cdot L = 3 + i \notin \mathbb{R} \Rightarrow$

الجذران غير مترافقين

$(a)\ a = 1, b = 0, c = 12$

$M + L = -\frac{b}{a} = 0 \in \mathbb{R}$

$M \cdot L = +\frac{c}{a} = 12 \in \mathbb{R}$

$\therefore$ الجذران مترافقان

$z^2 = -12 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-12}$ $\Rightarrow z = \pm 2\sqrt{3}\, i$ $(b)\ S.S. = \{2 - i\ ,\ 1 + i\}$	$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(3+i)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{\boxed{-3-4i}}}{2}$ Let $\sqrt{-3-4i} = x + yi$ $\Rightarrow (x + yi)^2 = -3 - 4i \Rightarrow \underbrace{(x^2 - y^2)}_{Re(z_1)} + \underbrace{(2xy)}_{Im(z_1)} i = \underbrace{-3}_{Re(z_2)} \underbrace{-4i}_{Im(z_2)}$ أكمل الحل
$z^2 - (M + L)z + M \otimes L = 0$ $\Rightarrow \boxed{z^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} z + \frac{11}{16} = 0}$	**Q16:** : ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذريها: $\frac{\sqrt{2} + 3i}{4}$ الحل: ليكن الجذران هما : M , L وبما أن معاملات المعادلة أعداد حقيقية لذا فالجذران مترافقان $M = \frac{\sqrt{2} + 3i}{4} \Rightarrow L = \frac{\sqrt{2} - 3i}{4} \Rightarrow M + L = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ M \otimes L = \frac{2 + 9}{16} = \frac{11}{16}$
	Q17: إذا كان $3 + i$ هو أحد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5 + 5i) = 0$ فجد قيمة a وجد الجذرالآخر. الحل : كل جذر من جذور المعادلة يحققها: $\Leftarrow (3 + i)^2 - a(3 + i) + (5 + 5i) = 0$ $9 + 6i - 1 + 5 + 5i = a(3 + i) \Rightarrow 13 + 11i = a(3 + i) \Rightarrow a = \frac{13 + 11i}{3 + i}$ $\Rightarrow a = \frac{13 + 11i}{3 + i} \times \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{39 - 13i + 33i + 11}{9 + 1} = \frac{50 + 20i}{10} = 5 + 2i$ $M \times L = 5 + 5i \Rightarrow (3 + i) \times L = 5 + 5i \Rightarrow L = \frac{5 + 5i}{3 + i} \times \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{20 + 10i}{10} = 2 + i$
$4 - 4i\ ,\ -4 + 4i$	**Q18:** جد الجذران التربيعيان للعدد 8i . $\left(\frac{1}{2} \cdot {}^{-}8\right)^2 = \boxed{16}\ ,\ z = -8i = 16 - 8i - 16 = 16 - 8i + 16i^2 = (4 - 4i)^2$ $\therefore \sqrt{z} = \pm\sqrt{(4 - 4i)^2} \Rightarrow \sqrt{z} = \pm(4 - 4i)$

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح : $1\ ,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\ ,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ أو $1\ ,\ \omega\ ,\ \omega^2$

القاعدة الأساسية : $\boxed{1 + \omega + \omega^2 = 0}$	القاعدة الأسية : $\forall n \in \mathbb{N}\ then\ \omega^{3n} = \omega^{\pm 3} = \omega^{\pm 6} = \omega^{\pm 9} = \ldots = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}\ then\ i^{4n} = i^{\pm 4} = i^{\pm 8} = i^{\pm 12} = \ldots = 1$

التفكير بحل أسئلة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح (ω) " في البداية تخلص من الأس الأكبر من 2 وذلك بقسمة الأس على 3n "

ثم اتبع التسلسل التالي

النوع الأول : للتخلص من ω المقام اضرب البسط في ω^{3n} المناسبة

$ex.1.\ \frac{5}{3\omega i} = \frac{5 \cdot \omega^3 (-i^2)}{3\omega i} = -\frac{5}{3}\omega^2 i$

$$ex2.\ \frac{5}{\left(1+\omega^{16}\right)^5}=\frac{5}{\left(1+\left(\omega^3\right)^5\cdot\omega\right)^5}=\frac{5}{\left(1+\omega\right)^5}=\frac{5}{\left(-\omega^2\right)^5}$$

$$=\frac{5}{\left(-1\right)^5\cdot\left(\omega^2\right)^5}=\frac{5}{-\omega^{10}}=-\frac{5\cdot\omega^{12}}{\omega^{10}}=-5\omega^2$$

$$ex3:\ \omega^{6n-14}$$

$$=\underbrace{\omega^{6n}}_{=1}\cdot\omega^{-14}=\omega^{-14}\cdot\omega^{+15}=\omega$$

النوع الثاني : فكر بوجود قانون فرعي من القانون الأساسي : $1+\omega+\omega^2=0$

$$ex.2.\ \frac{5}{\underbrace{1+3\omega+\omega^2}_{=-\omega}}=\frac{5}{-\omega+3\omega}=\frac{5}{2\omega}\cdot\omega^3=\frac{5}{2}\omega^2$$

النوع الثالث : فكر بوجود عامل مشترك نفس العدد بنفس الإشارة(وبعد إخراج المشترك نحصل على قانون فرعي)

$$ex.3.\ \left(3+5\omega+3\omega^2\right)=\left[3\left(1+\omega^2\right)+5\omega\right]^6=\left(-3\omega+5\omega\right)^6=\left(2\omega\right)^6=64\omega^6=64$$

النوع الرابع : للبسط والمقام نفس المعاملات(أعياد ميلاد)

للحل: يوجد بالبسط والمقام عددين مجردين من ω اضرب احدهما في ω^3 ثم عامل مشترك

$$ex.4.\ \frac{25+12\omega}{25\omega^2+12}=\frac{25+12\omega}{25\omega^2+12\omega^3}=\frac{\cancel{25+12\omega}}{\omega^2\left(\cancel{25+12\omega}\right)}=\frac{1}{\omega^2}\cdot\omega^3=\omega$$

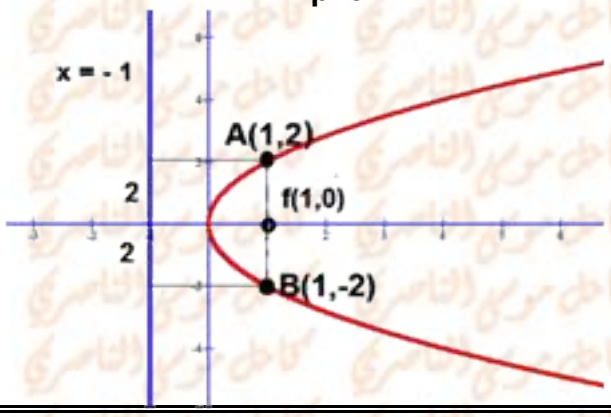
النوع الخامس : المقدار مكون من ثلاثة حدود مختلفة العوامل لا تنطبق عليه الأنواع الأربعة السابقة

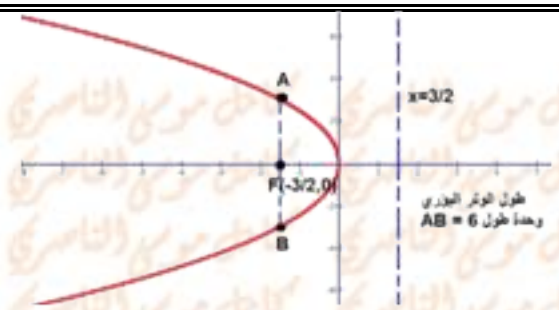
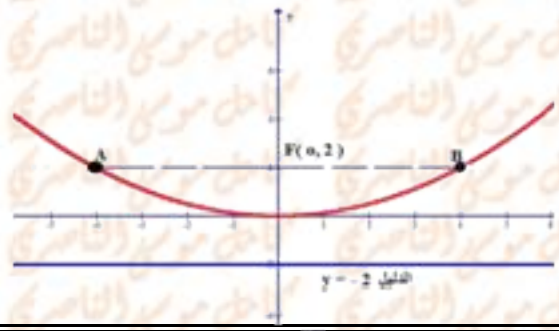
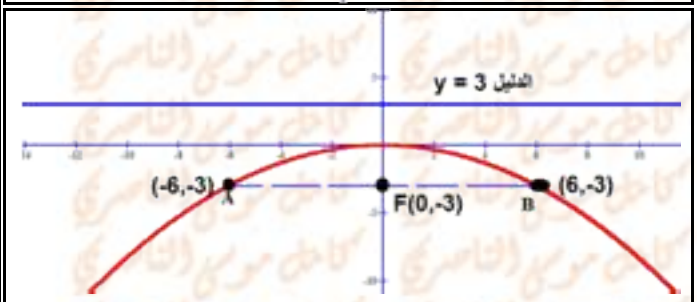
للحل : يحول المقدار الى حدين وذلك بعد استبدال ω^2 بـ $-1-\omega$

$$ex.5.\ \sqrt{\frac{4+5\omega^2+6\omega}{1-\omega}}=\sqrt{\frac{4+5\left(-1-\omega\right)+6\omega}{1-\omega}}=\sqrt{\frac{4-5-5\omega+6\omega}{1-\omega}}=\sqrt{\frac{\omega-1}{1-\omega}}=\sqrt{\frac{-\left(1-\omega\right)}{\omega-1}}=\sqrt{-1}=i$$

The equations (a) $z^2-(2+i)z+i=0$ (b) $z^2+\frac{1}{7}z+\frac{1}{7}=0$ $\Rightarrow 7z^2+z+1=0$	**Q19:** جد المعادلة التربيعية التي جذراها $(a)\ 1-\frac{i}{\omega^2},\ 1+\frac{\omega^2}{i}$, $(b)\ \frac{\omega}{2-\omega^2},\ \frac{\omega^2}{2-\omega}$ $(a)\ M=1-\frac{i}{\omega^2}=1-\frac{i\omega^3}{\omega^2}=\boxed{1-i\omega}$, $L=1+\frac{\omega^2}{i}=1+\frac{\left(-i^2\right)\omega^2}{i}=\boxed{1-i\omega^2}$ $M+L=1\underbrace{-i\omega\oplus 1-i}\omega^2=2-i\left(\omega+\omega^2\right)=2+i$ $M\cdot L=\left(1-i\omega\right)\otimes\left(1-i\omega^2\right)=\cancel{1}-\underbrace{i\omega^2-i}\omega+\cancel{i^2\omega^3}=-i\left(\omega+\omega^2\right)=i$ the equation : $z^2-\left(M+L\right)\cdot z+M\cdot L=0$????????????? $(b)\ M+L=\frac{\omega}{2-\omega^2}+\frac{\omega^2}{2-\omega}=\frac{\omega\left(2-\omega\right)+\omega^2\left(2-\omega^2\right)}{\left(2-\omega\right)\left(2-\omega^2\right)}=\frac{2\omega-\omega^2+2\omega^2-\omega}{4-2\omega^2-2\omega+1}$ $=\frac{\omega+\omega^2}{5-2\left(\omega+\omega^2\right)}=-\frac{1}{7}$ $M\cdot L=\frac{\omega}{2-\omega^2}\cdot\frac{\omega^2}{2-\omega}=\frac{\omega^3}{\left(2-\omega\right)\left(2-\omega^2\right)}=\frac{1}{7}$

$=[-4\omega+\omega]^3=(-3\omega)^3$ $=-27(\omega^3)=-27\cdot 1=-27$	**Q20:** جد ناتج : $\left(3\omega^{9n}+\frac{5}{\omega^5}+\frac{4}{\omega^4}\right)^6$ $\left(3\omega^{9n}+\frac{5}{\omega^5}+\frac{4}{\omega^4}\right)^6=\left(3(\omega^3)^{3n}+\frac{5}{\omega^2\cdot\omega^3}+\frac{4}{\omega\cdot\omega^3}\right)^6=\left(3+\frac{5}{\omega^2}\cdot\omega^3+\frac{4}{\omega}\cdot\omega^3\right)^6=(3+5\omega+4\omega^2)^6$ $=\left(\underbrace{3+3\omega+3\omega^2}_{3(1+\omega+\omega^2)=0}+2\omega+\omega^2\right)^6=\left((2\omega+\omega^2)^2\right)^3=(4\omega^2+4+\omega)^3=\left[4(\omega^2+1)+\omega\right]^3$
Keys of solution	**Question**
$-\frac{1}{2}$	**Q21:** إذا كانت $z^2+z+1=0$ فجد قيمة المقدار $\frac{1+3z^{10}+3z^{11}}{1-3z^7-3z^8}$ $Solution.\ z^2+z+1=0\Rightarrow a=b=c=1\Rightarrow$ $z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=(\omega)\,Or\,(\omega^2)$ $When\ \ z=\omega\Rightarrow\frac{1+3z^{10}+3z^{11}}{1-3z^7-3z^8}=\frac{1+3\omega^{10}+3\omega^{11}}{1-3\omega^7-3\omega^8}=\frac{1+3(\omega^3)^3\cdot\omega+3(\omega^3)^3\cdot\omega^2}{1-3(\omega^3)^2\cdot\omega-3(\omega^3)^2\cdot\omega^2}$ $=\frac{1+3\omega+3\omega^2}{1-3\omega-3\omega^2}=\frac{1+3(\omega+\omega^2)}{1-3(\omega+\omega^2)}=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$ $When\ \ z=\omega^2\Rightarrow$
	Q22: اثبت أن: $(a)\left(\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{2+\omega^2}\right)^2=-\frac{1}{3}\quad,\quad(b)\frac{\omega^{14}+\omega^7-1}{\omega^{10}+\omega^5-2}=\frac{2}{3}$ $(a)\left(\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{2+\omega^2}\right)^2=-\frac{1}{3}\ ,\ \ L.H.S.=\left(\frac{2+\omega^2-2-\omega}{(2+\omega)(2+\omega^2)}\right)^2=\left(\frac{\omega^2-\omega}{4+2\omega^2+2\omega+1}\right)^2$ $=\left(\frac{\omega^2-\omega}{5+2(\omega^2+\omega)}\right)^2=\frac{\omega^4-2\omega^3+\omega^2}{9}=\frac{\omega-2+\omega^2}{9}=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}=R.H.S.$

$p>0$ دائما  	القطع المكافئ: $y^2=+4px$ قطع سيني أيمن بؤرته $(p,0)$ ومعادلة دليله $x=-p$ ورأسه نقطة الاصل متماثل مع محور السينات $y=0$ الشكل على اليسار: $y^2=+4x$

القطع المكافئ: $y^2 = -4px$ قطع سيني أيسر بؤرته $(-p,0)$ ومعادلة دليله $x = +p$ ورأسه نقطة الأصل متماثل مع محور السينات $y = 0$ الشكل على اليسار: $y^2 = -6x$ طول وتره البؤري $=4p=$ 6 $\Leftarrow$ $p = 3/2$ سيني ايسر البؤرة : F(-3/2,0) والدليل x=3/2 لذا يمر القطع من $(-3/2, \pm 3)$	
القطع المكافئ: $x^2 = 4py$ قطع صادي علوي بؤرته $F(0,p)$ ومعادلة دليله $D: y = -p$ ورأسه نقطة الأصل متماثل مع محور الصادات $x = 0$ الشكل على اليسار: $x^2 = 8y$ طول وتره البؤري $=4p=$ 8 $\Leftarrow$ p =2 صادي للاعلى بؤرته $F(0,2)$ ومعادلة دليله $D: y = -2$ لذا يمر القطع من $(\pm 4, 2)$	
القطع المكافئ: $x^2 = -4py$ قطع صادي للأسفل بؤرته $(0,-p)$ ومعادلة دليله $y = +p$ ورأسه نقطة الأصل متماثل مع محور الصادات $x = 0$ الشكل على اليسار: $x^2 = -12y$ طول وتره البؤري $=4p=$ 12 $\Leftarrow$ p=3 صادي للأسفل بؤرته $F(0,-3)$ ومعادلة دليله $D: y = +3$ لذا يمر القطع من $(\pm 6, -3)$	

لحل أي سؤال مكافئ باستعمال التعريف يجب معرفة البؤرة ومعادلة الدليل.

Q23 : مستخدما التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $y = \frac{3}{2}$

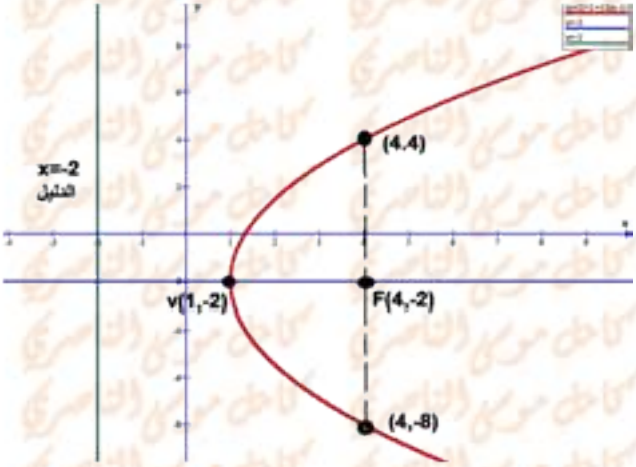
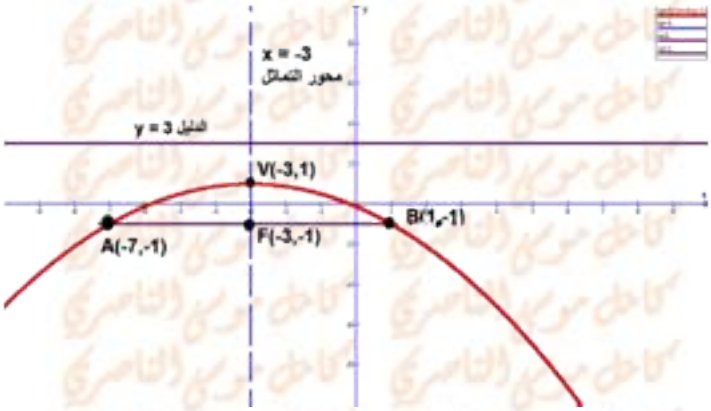
الحل : البؤرة والدليل متعاكسين بالإشارة ، وبما أن معادلة الدليل هي $y = \frac{3}{2}$ لذا فالبؤرة هي $F\left(0, \frac{-3}{2}\right)$

التعريف : بعد (x, y) عن البؤرة $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ = بعد (x, y) عن الدليل $y = \frac{3}{2}$

$$\left|y - \frac{3}{2}\right| = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2}$$ ومن تربيع الطرفين نحصل على

$$y^2 - 3y + \frac{9}{4} = x^2 + y^2 + 3y + \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 = 6y$$

قطوع فيها انسحاب

القطع المكافئ: $(y-k)^2 = +4p(x-h)$ قطع محوره y=k موازي لمحور السينات و أيمن رأسه $V(h,k) \leftrightarrow F(h+p,k)$ ودليله $x = h-p$ والقطع المكافئ: $(y-k)^2 = -4p(x-h)$ قطع محوره y=k موازي لمحور السينات و أيسر رأسه $V(h,k) \leftrightarrow F(h-p,k)$ ودليله $x = h+p$ مثلا: المكافئ: $(y+2)^2 = +12(x-1)$ طول وتره البؤري $= 4p = 12 \Leftarrow p = 3$ قطع محوره y = - 2 موازي لمحور السينات و أيمن رأسه $V(1,-2) \leftrightarrow F(1+3,-2)$ ودليله $x = 1-3$ القطع يمر من النقطتين $(1+3, -2 \pm 6)$	p>0 دائما 
القطع المكافئ: $(x-h)^2 = +4p(y-k)$ قطع محوره $x = h$ يوازي محور الصادات وللأعلى رأسه $V(h,k) \leftrightarrow F(h,k+p)$ ودليله $y = k-p$ القطع المكافئ: $(x-h)^2 = -4p(y-k)$ قطع محوره $x = h$ يوازي محور الصادات وللأسفل رأسه $V(h,k) \leftrightarrow F(h,k-p)$ ودليله $y = k+p$ مثلا: المكافئ $x^2+6x+8y+1 = 0$ $x^2+6x = -8y-1 \Leftarrow$ $x^2+6x+9 = -8y-1+9 \Leftarrow$ $(x+3)^2 = -8y+8 \Leftarrow$ $(x+3)^2 = -8(y-1) \Leftarrow$ القطع المكافئ: طول وتره البؤري $= 8 = 4p \Leftarrow p = 2$ القطع محور تماثله $x = -3$ يوازي محور الصادات وللأسفل رأسه $V(-3,1) \leftrightarrow F(-3,1-2)$ ودليله $y = 1+2$ القطع يمر من النقطتين $(-3 \pm 4, -1)$ طرفا الوتر البؤري العمودي على محور التماثل	

Q25 : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته على أحد محوري الاحداثيين والذي:-

١- بؤرته $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ الحل: $p = \frac{5}{2}$ والقطع صادي وللأسفل لذا المعادلة $x^2 = -4py \Leftarrow x^2 = -10y$	٢- معادلة دليله $x = -5$ الحل : البؤرة والدليل متعاكسين بالإشارة $\Leftarrow F(5,0)$ $\therefore p = 5$ والقطع سيني أيمن لذا المعادلة $y^2 = +4px \Leftarrow y^2 = 20x$
٣- بؤرته على الصادات ويمر من النقطة $(-2,1)$ الحل: القطع صادي وللأعلى لأن الاحداثي الصادي للنقطة موجب لذا المعادلة $x^2 = 4py$ لكنه يمر من $(-2,1)$ فتحقق معادلته $4 = 4p(1) \Leftarrow 4p = 4 \Leftarrow$ المعادلة هي $x^2 = 4y$	٤- دليله يمر من النقطة $(-3,5)$ a. اذا كان القطع سيني فسيكون أيمن لأن الإحداثي السيني للنقطة سالب أي الدليل باليسار لذا تكون البؤرة $(p,0)$ والدليل $x = -p$ فالنقطة $(-3,5)$ تحقق معادلة الدليل $\Leftarrow -3 = -p$ $p = 3$ فالمعادلة $y^2 = 4px$ تصبح $y^2 = 12x$ b. إذا كان القطع صادي (أكمل الحل) c. فتحصل على الإجابة $x^2 = -20y$
٥- يمر من النقطتين $(-2,6),(-2,-6)$ المنحني متماثل مع محور السينات $\Leftarrow$ بؤرته على السينات وبما أن الاحداثي السيني للنقطتين سالب فان المنحني سيني أيسر لذا تكون معادلته $y^2 = -4px$ لكنه يمر من النقطتين $(-2,\pm 6)$ فتحققان المعادلة $(\pm 6)^2 = -4p(-2)$ نستنتج أن $4p = 18$ لذا تكون المعادلة $y^2 = -18x$	**Q26.** القطع المكافئ $y^2 = (2-a)x$ يمر من النقطة $(-2,4)$ جد قيمة a ثم جد البؤرة ومعادلة الدليل . الحل : المكافئ يمر من النقطة $(-2,4)$ فتحقق معادلته: $(4)^2 = (2-a)(-2) \Leftarrow$ a=10 لذا تصبح المعادلة $y^2 = -8x$ القطع سيني ايسر $4p = 8 \Leftarrow p = 2 \Leftarrow$ البؤرة $(-2,0)$ والدليل $x = 2$

القطع زائد	القطع ناقص	المعطيات أو المطلوب
القطع سيني: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ القطع صادي: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	القطع سيني: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ القطع صادي: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	معادلته
مع محور السينات ومع محور الصادات وحول نقطة الاصل	مع محور السينات ومع محور الصادات وحول نقطة الاصل	التماثل (التناظر)
$\lvert PF_1-PF_2\rvert=2a$	$PF_1+PF_2=2a$	تعريف القطع : $P(x,y)$ من نقط القطع F_1,F_2 البؤرتان ، العدد الثابت = 2a
المسافة بين الرأسين= طول المحور الاساسي	المسافة بين الرأسين= طول المحور الاكبر	2a
طول المحور المرافق	المسافة بين القطبين = طول المحور الاصغر	2b
المسافة بين البؤرتين	المسافة بين البؤرتين	2c
e = c/a > 1	e = c/a < 1	الاختلاف المركزي = e
لا توجد منطقة مغلقة		مساحته
لا توجد منطقة مغلقة	$S\approx 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)}$	محيطه
$c^2=a^2+b^2$	$a^2=b^2+c^2$	العلاقة بين a,b,c a,b,c>0 وأن a,c على نفس المحور والعكس بالنسبة لـ b
للقطع السيني $x=\pm a^2/c$ للقطع الصادي $y=\pm a^2/c$	للقطع السيني $x=\pm a^2/c$ للقطع الصادي $y=\pm a^2/c$	معادلتي الدليلين - للاطلاع
للقطع السيني $y=\pm(b/a)x$ للقطع الصادي $y=\pm(a/b)x$	لايوجد	معادلتي المحاذيين (المقاربين) - للاطلاع
طول الوتر البؤري العمودي	طول الوتر البؤري العمودي	$\frac{2b^2}{a}$ للاطلاع
4 = a		القطع يمر من $(-4,0)$
8 = a	8 = a or 8 = b	القطع يمس المستقيم y =-8
النقطة تحقق المعادلة	النقطة تحقق المعادلة	القطع يمر من $(-2,1)$
مجموع البعدين= 2c فرق البعدين = 2a	مجموع البعدين= 2a فرق البعدين = 2c	احدى البؤرتين تبعد عن الرأسين بالبعدين 12,4
لا يمكن	5= a , 3= b	يمر من النقطتين $(-5,0),(0,3)$
لا يمكن	10 = 2c⇒ c = 5 يمر من $(0,-5)$ ⇐ 5 = b ؟!	المسفة بين بؤرتيه =10 وحدة طول ويمر من النقطة$(0,-5)$
10 = 2c ⇒ c = 5 يمر من $(0,-4)$ ⇐ 4 = a صادي	10 = 2c ⇒ c = 5 يمر من $(0,-4)$ ⇐ 4 = b (؟؟؟) صادي ⇐ a , c سيني	المسفة بين بؤرتيه =10 وحدة طول ويمر من النقطة$(0,-4)$
الرسم أفضل وسيلة لفهم الاستنتاجات السابقة		

نقاط مضيئة للقطعين الزائد والناقص (تراجع بهدوء)

Q26: ارسم واذكر خواص القطوع المخروطية التالية.

a. $x^2 + 2y^2 = 1$

الحل : المنحني يمثل قطعا ناقصا مركزه نقطة الأصل ومحوري تماثله هما محوري الاحداثيين، نحول المعادلة للصيغة القياسية

$$x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

العدد الأكبر = $a^2 = 1 \Leftarrow a = 1$ سيني

الرأسان : $V_1(1,0), V_2(-1,0)$

العدد الأصغر = $b^2 = \frac{1}{2} \Leftarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ صادي

القطبان : $\overline{V_1}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \overline{V_2}\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

البؤرتان : $F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), F_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

طول المحور الكبير = $2a = 2\,unit$

طول المحور الأصغر = $2b = \sqrt{2}\ unit$

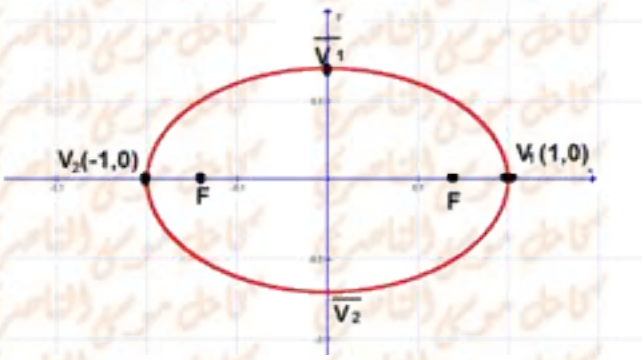
المسافة بين البؤرتين = $2c = \sqrt{2}\ unit$

الاختلاف المركزي = $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

مساحة منطقة القطع الناقص : $A = ab\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi\ unit^2$

محيط القطع الناقص التقريبي :

$$S \approx 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)} = \sqrt{3}\pi$$



b. $x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0$

الحل :

$$x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + 4x\right) + \left(25y^2 - 150y\right) = -204$$

$$\Rightarrow 1\left(x^2 + 4x + ?\right) + 25\left(y^2 - 6y + ??\right) = -204$$

$$\left(x^2 + 4x + 4\right) + 25\left(y^2 - 6y + 9\right) = -204 + (4) + (25 \times 9)$$

$$(x+2)^2 + 25(y-3)^2 = 25 \overset{\div 25}{\Rightarrow} \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$$

المنحني يمثل قطعا ناقصا

محور التماثل الموازي لـ $\overleftrightarrow{Y}$: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 = h$

محور التماثل الموازي لـ $\overleftrightarrow{X}$: $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 = k$

$\therefore$ مركز القطع : $M(h,k) \Rightarrow M(-2,3)$

العدد الأكبر = $a^2 = 25 \Leftarrow a = 5$

الرأسان : $V(h \pm a, k) \Rightarrow V(-2 \pm 5, 3) \Rightarrow (3,3), (-7,3)$

العدد الأصغر = $b^2 = 1 \Leftarrow b = 1$

القطبان : $\overline{V}(h, k \pm b) \Rightarrow \overline{V}(-2, 3 \pm 1) \Rightarrow (-2,4), (-2,2)$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 1 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{24}$$

البؤرتان : $F(h \pm c, k) \Rightarrow F\left(-2 \pm \sqrt{24}, 3\right)$

طول المحور الكبير = $2a = 10\,unit$

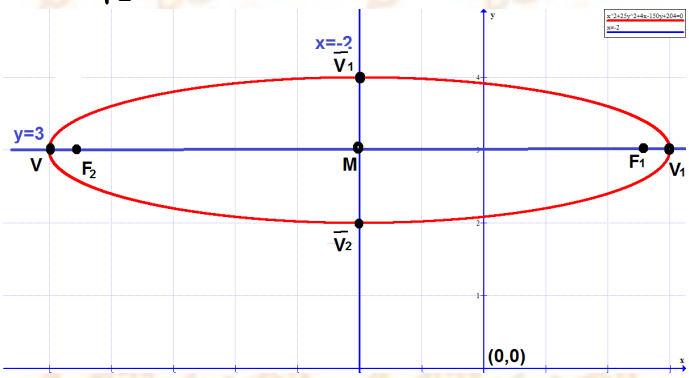
طول المحور الأصغر = $2b = 2\ unit$

المسافة بين البؤرتين = $2c = 2\sqrt{24}\ unit$

الاختلاف المركزي = $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{24}}{5}$

مساحة منطقة القطع الناقص : $A = ab\pi = 5\pi\ unit^2$

محيط القطع الناقص التقريبي : $S \approx 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)} = 2\sqrt{13}\,\pi$



c. $9y^2 - 16x^2 + 144 = 0$

الحل: القطع زائد مركزه نقطة الأصل ومحوريه منطبقين على محوري الاحداثيين.

$$9y^2 - 16x^2 = -144 \qquad \times(-1)$$

$$16x^2 - 9y^2 = 144 \qquad \div(144)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

العدد الأول = $a^2 = 9 \Leftarrow a = 3$ سيني

الرأسان : $V_1(3,0)\ ,\ V_2(-3,0)$

العدد الثاني = $b^2 = 16 \Leftarrow b = 3$

البؤرتان : $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16 = 25$

$\therefore c = 5 \Rightarrow F_1(5,0), F_2(-5,0)$

لاحظ أن البؤرتين والرأسيان تقعان على نفس المحور

طول المحور الأساسي(الحقيقي) = 2a = 6 وحدة طول

طول المحور المرافق (التخيلي) = 2b = 8 وحدة طول

المسافة بين البؤرتين = 2c = 10 وحدة طول

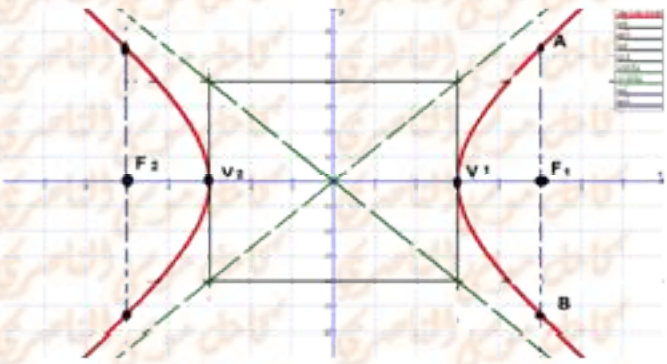
الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} > 1$

طول الوتر البؤري العمودي (للاطلاع)= $AB = \frac{2b^2}{a} = \frac{32}{3}$

وهذا يعني ان القطع يمر بالنقط الأربعة: $\left(5, \pm\frac{16}{3}\right), \left(-5, \pm\frac{16}{3}\right)$

وللاطلاع أيضا : معادلتي المحاذيين : $y = \pm\left(\frac{b}{a}\right)x$

$\Leftarrow y = \pm\left(\frac{4}{3}\right)x$



d. $16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$

الحل: المعادلة هي معادلة قطع زائد تحول للصيغة القياسية بطريقة إكمال المربع.

$$16\left(x^2 + 10x + ?\right) - 9\left(y^2 - 2y + ?\right) = 185$$

$$16\left(x^2 + 10x + 25\right) - 9\left(y^2 - 2y + 1\right) = 185 + 16(25) - 9(1)$$

$$16(x+5)^2 - 9(y-1)^2 = 576 \qquad \Big|\div 576$$

$$\frac{(x+5)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1$$

محور التماثل الموازي لـ $\overleftrightarrow{Y}$: $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 = h$

محور التماثل الموازي لـ $\overleftrightarrow{X}$: $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 = k$

$\therefore$ مركز القطع : $M(h,k) \Rightarrow M(-5,1)$

العدد الأول = $a^2 = 36 \Leftarrow a = 6$

الرأسان : $V(h \pm a, k) \Rightarrow V(-5 \pm 6, 1) \Rightarrow (1,1), (-11,1)$

العدد الثاني = $b^2 = 64 \Leftarrow b = 8$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 64 + 36 \Rightarrow c = 10$

البؤرتان :

$F(h \pm c, k) \Rightarrow F(-5 \pm 10, 1) \Rightarrow f_1(5,1), f_2(-15,1)$

طول المحور الحقيقي = $12\ units = 2a$

طول المحور المرافق = $16\ units = 2b$

المسافة بين البؤرتين = $20\ units = 2c$

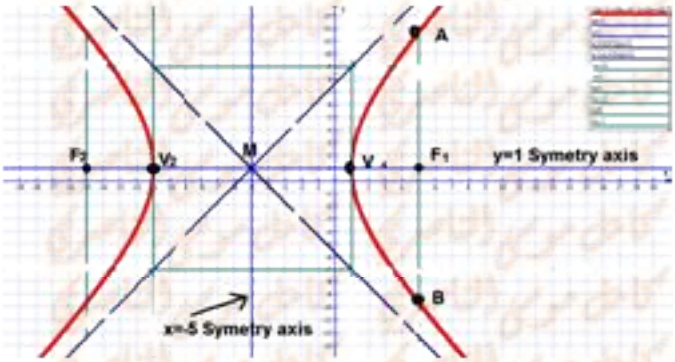
الاختلاف المركزي = $e = \frac{c}{a} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} > 1$

طول الوتر البؤري العمودي (للاطلاع)= $AB = \frac{2b^2}{a} = \frac{64}{3}$

وهذا يعني ان القطع يمر بالنقط الأربعة: $\left(5, \pm\frac{32}{3}\right), \left(-15, \pm\frac{32}{3}\right)$

وللاطلاع أيضا : معادلتي المحاذيين : $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$

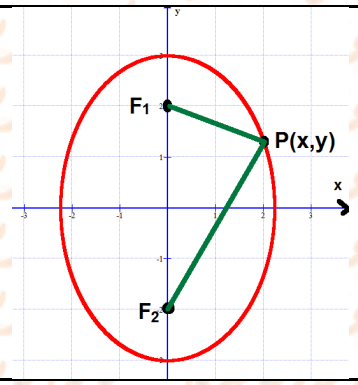
$$\Rightarrow y - 1 = \pm\frac{4}{3}(x + 5)$$



Q26 : باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص: بؤرتاه $(0, \pm 2)$ ورأساه النقطتان $(0, \pm 3)$

أو المسافة بين بؤرتيه = 4 وحدة والعدد الثابت (6) وحدة وبؤرتاه من نقط محور الصادات

قطع زائد : جد باستخدام التعريف معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أية نقطة تقع عليه عن بؤرتيه يساوي (4) وحدة طول .



$PF_1 + PF_2 = 2a$ that for an ellipse

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+2)^2}=6$$

$$\sqrt{x^2+(y+2)^2}=6-\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$(y+2)^2+\cancel{x^2}=$$

$$36-12\sqrt{x^2+(y-2)^2}+\cancel{x^2}+(y-2)^2$$

$$\cancel{y^2}+4y+\cancel{4}$$

$$=36-12\sqrt{x^2+(y-2)^2}+\cancel{y^2}-4y+\cancel{4}$$

$$12\sqrt{x^2+(y-2)^2}=36-8y \quad |\div 4$$

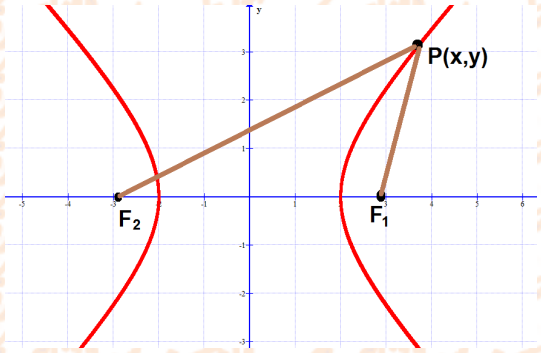
$$3\sqrt{x^2+(y-2)^2}=9-2y \xrightarrow{\text{square both sides}}$$

$$9\left\{x^2+(y-2)^2\right\}=(9-2y)^2$$

$$9x^2+9y^2\cancel{-36y}+36=81\cancel{-36y}+4y^2$$

$$9x^2+5y^2=45 \quad |\div 45$$

$$\frac{x^2}{5}\oplus\frac{y^2}{9}=1$$



$|PF_1 - PF_2| = 2a$ for hyperbola

$$\left|\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+(y-0)^2}\right|=4$$

$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+(y-0)^2}=\pm 4$$

$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2}=\pm 4+\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}$$

$$(x-2\sqrt{2})^2+\cancel{y^2}$$

$$=16\pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}+(x+2\sqrt{2})^2+\cancel{y^2}$$

$$\cancel{x^2}-4\sqrt{2}x+\cancel{8}$$

$$=16\pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}+\cancel{x^2}+4\sqrt{2}x+\cancel{8}$$

$$\mp 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}=16+8\sqrt{2}x \xrightarrow{\div 8}$$

$$\mp\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}=2+\sqrt{2}x \xrightarrow{\text{square both sides}}$$

$$(x+2\sqrt{2})^2+y^2=(2+\sqrt{2}x)^2$$

$$x^2+\cancel{4\sqrt{2}x}+8+y^2=4+\cancel{4\sqrt{2}x}+2x^2$$

$$x^2-y^2=4 \xrightarrow{\div 4} \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$$

الطريقة السابقة للقطوع الزائدة والناقصة وهي نماذج تستبدل فقط الارقام

Q27: جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه نقطتا تقاطع الدائرة $x^2+y^2+8x-16=0$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$

الحل : تقاطع الناقص مع الصادات يعوض بالمعادلة $x=0$

فنحصل على $y^2=16 \Leftarrow y=\pm 4$

بؤرتا الناقص هما $(0,\pm 4) \Leftarrow \overleftrightarrow{y}\ On\ \ c=4$

على الصادات $\Leftarrow$ a على الصادات ، b على السينات

$y^2=12x$ سيني أيمن

$12=4p \Leftarrow p=3 \Leftarrow F(3,0) \Leftarrow D: x=-3$

الناقص يمس المستقيم الدليل $x=-3 \Leftarrow b=3$

Q29 : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2=24y$ ومجموع طولي محوريه 36 وحدة طول

الحل : $x^2=24y$ صادي للأعلى ،

$\therefore$ بؤرة المكافئ هي $(0,6) \Leftarrow$ بؤرتا القطع الناقص $(0,\pm 6)$

$\Leftarrow c=6$ صادي

مجموع طولي محوريه 36 وحدة طول

$\Leftarrow 2a+2b=36 \Leftarrow a+b=18 \Leftarrow a=18-b$

فيثاغورس: $a^2=b^2+c^2 \Leftarrow (18-b)^2=b^2+36$

$\Leftarrow 324-36b+\cancel{b^2}=\cancel{b^2}+36 \Leftarrow b=8$

$\therefore a=10$ فالمعادلة تصبح $\frac{x^2}{64}\oplus\frac{y^2}{100}=1$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=9+16=25$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ the equation

Q28 جد معادلة القطع الناقص السيني الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الكبير يساوي ضعف طول محوره الصغير والذي يقطع القطع المكافئ $y^2+8x=0$ في النقطة التي احداثيها السيني يساوي -2 ، ثم جد مساحة القطع الناقص.

الحل : النقطة $x=-2$ هي نقطة تقطع فهي تحقق كلتا المعادلتين للمكافئ والناقص.

المكافئ :

$$y^2+8x=0 \xrightarrow{x=-2} y^2+8(-2)=0 \Rightarrow y=\pm 4$$

$(-2,\pm 4)$ هما نقطتا التقاطع

الناقص: $2a=2(2b) \to a=2b \to a^2=4b^2$

لكن الناقص $\frac{x^2}{\underbrace{a^2}_{=4b^2}}\oplus\frac{y^2}{b^2}=1$ يمر من نفس النقطتين

$(-2,\pm 4)$ فتحققان المعادلة.

$$\frac{(-2)^2}{4b^2}\oplus\frac{(\pm 4)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{b^2}\oplus\frac{16}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{17}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=17 \Rightarrow a^2=4\bullet 17=68$$

فتكون معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{68}\oplus\frac{y^2}{17}=1$

المساحة :

$$A=ab\pi=\sqrt{68}\bullet\sqrt{17}\pi=2\sqrt{17}\bullet\sqrt{17}=34 \text{ square units}$$

Q29: جد معادلة القطع الناقص السيني الذي يمر من النقطتين $(3,4),(6,2)$ ومركزه نقطة الأصل.

الحل : معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ يمر من النقطة $(3,4)$ فتحقق معادلته $\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \quad \ldots(1)$

يمر من النقطة $(6,2)$ فتحقق معادلته $\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad \ldots(2)$

من ضرب طرفي المعادلة الثانية في (4 -) نحصل على $\frac{-144}{a^2}-\frac{16}{b^2}=-4 \quad \ldots(2)$

لكن $\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \quad \ldots(1)$ أكمل الحل

Q30 : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه 36 وحدة طول

الحل : $x^2 = 24y$ صادي للأعلى ،

$\therefore$ بؤرة المكافئ هي $(0, 6)$ $\Leftarrow$ بؤرتا القطع الناقص $(0, \pm 6)$

$\Leftarrow$ $c = 6$ صادي

مجموع طولي محوريه 36 وحدة طول

$\Leftarrow 2a + 2b = 36 \Leftarrow a + b = 18 \Leftarrow a = 18 - b$

فيثاغورس: $a^2 = b^2 + c^2 \Leftarrow (18 - b)^2 = b^2 + 36$

$\Leftarrow 324 - 36b + \cancel{b^2} = \cancel{b^2} + 36 \Leftarrow b = 8$

$\therefore$ $a = 10$ فالمعادلة تصبح $\frac{x^2}{64} \oplus \frac{y^2}{100} = 1$

Q30: القطع الناقص $2x^2 + 4y^2 = h$ المسافة بين بؤرتيه تساوي $\|2i - 2\|$ units ، جد قيمة h

الحل: المعادلة تحوي ثابت واحد هو h لنحدد من هو a^2 ومن b^2

$$2x^2 + 4y^2 = h \xrightarrow{\div h} \frac{2}{h}x^2 \oplus \frac{4}{h}y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{h}{2}} \oplus \frac{y^2}{\frac{h}{4}} = 1$$

العدد الأكبر = $a^2 = \frac{h}{2}$ ،،، العدد الأصغر = $b^2 = \frac{h}{4}$

$$\|2i - 2\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2} = 2c$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{h}{4} + 2 \overset{\times 4}{\Rightarrow} h = 8$$

Q31: قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومحوريه منطبقين على محوري الإحداثيات محيطه يساوي 10π وحدة ومساحته 7π وحدة مربعة ، جد معادلته.

الحل: $ab\pi = 7\pi \Rightarrow a = \frac{7}{\pi} \quad \ldots(1)$

$$10\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} \Rightarrow 5 = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

$$\Rightarrow 25 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = 50 \quad \ldots(2)$$

أكمل الحل لتحصل على معادلتين لأن السؤال لم يحدد موقع البؤرتين

Q32: قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ مجموع مربعي طولي محوريه يساوي 60 وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 4\sqrt{3}\,x$. جد قيمة h , k

الحل : لوجود ثابتين h , k نترك المعادلة مؤقتا

$y^2 = 4\sqrt{3}\,x$ سيني أيمن

$\Leftarrow F(\sqrt{3}, 0) \Leftarrow p = \sqrt{3} \Leftarrow 4\sqrt{3} = 4p$

بؤرتا القطع الناقص هما $(\pm\sqrt{3}, 0) \Leftarrow c = \sqrt{3}$ سيني

مجموع مربعي طولي محوريه يساوي 60

$\Leftarrow (2a)^2 + (2b)^2 = 60 \Leftarrow 4a^2 + 4b^2 = 60$

$\Leftarrow a^2 = 15 - b^2 \quad \ldots(1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 15 - b^2 = b^2 + 3$

$\Rightarrow 2b^2 = 12 \Rightarrow b^2 = 6 \Rightarrow a^2 = 9$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1 \quad equation \,|\times 36$

$\Rightarrow 4x^2 + 6y^2 = 36$

But $hx^2 + ky^2 = 36$

$\Rightarrow h = 4$ and $k = 6$

Q33: قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومحوريه منطبقين على محوري الإحداثيات إحدى بؤرتيه هي بؤرة المكافئ $x^2 + 32y = 0$ والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{5}{3}$ جد معادلته ومساحته ومحيطه .

الحل : $x^2 = -32y$ القطع صادي وللأسفل

$\Leftarrow F(0, -8) \Leftarrow p = 8 \Leftarrow 32 = 4p$

بؤرتا الناقص $(0, \pm 8)$ $\Leftarrow c = 8$ صادي

والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{5}{3} \Leftarrow \frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Leftarrow a = \frac{5}{3}b$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{25}{9}b^2 = \frac{9}{9}b^2 + 64 \Rightarrow \frac{16}{9}b^2 = 64$$

$$\Rightarrow b^2 = 64 \bullet \frac{9}{16} = 36 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \bullet 6 = 10$$

$$the\ equation: \frac{x^2}{36} \oplus \frac{y^2}{100} = 1$$

Q34: قطع ناقص معادلته $kx^2 + 4y^2 = 36$ وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{3}, 0)$ ، جد قيمة k الجواب 3

س35 : قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات ، احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر من النقطتين $(1, \pm 2\sqrt{5})$ ، جد معادلتي الزائد والمكافئ.

الحل : طول المحور الحقيقي = 6 $\Leftarrow 2a = 6 \Leftarrow a = 3$

المكافئ رأسه نقطة الأصل ويمر من النقطتين $(1, \pm 2\sqrt{5})$

المكافئ يحقق العبارة : $\forall (x, y) \in curve \ , \exists (x, -y) \in curve$

وهذا يعني أن المنحني متماثل مع محور السينات

$\therefore$ إما أن يكون أيمن أو ايسر، لكنه يمر من $(1, \pm 2\sqrt{5})$ واحدثيهما السيني موجب لذا فالمنحني أيمن. فتكون معادلته $y^2 = 4px$

لكنه يمر من $(1, \pm 2\sqrt{5})$ فتحققان هذه المعادلة

$$y^2 = 4px \Rightarrow (\pm 2\sqrt{5})^2 = 4p(1) \Rightarrow p = 5$$

$\therefore$ بؤرة المكافئ $(5, 0)$ ومعادلته $y^2 = 20x$

$\therefore$ بؤرتا القطع الناقص هما $(\pm 5, 0) \Leftarrow c = 5$ سيني

فيثاغورس: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

معادلة الزائد: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

س36: قطع زائد مركزه معادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ ، طول محوره الحقيقي $6\sqrt{2}$ وحدة وبؤرتاه تنطبق على بؤرتي القطع الناقص $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة h , k

الحل :

طول محوره الحقيقي للزائد $6\sqrt{2} \Leftarrow 2a = 6\sqrt{2} \Leftarrow \boxed{a = 3\sqrt{2}}$

الناقص : $9x^2 + 16y^2 = 576 \xrightarrow{\div 576} \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

العدد الأكبر $a^2 = 64 =$ سيني

العدد الأصغر $b^2 = 36 =$

فيثاغورس : $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = 36 + c^2 \Rightarrow c^2 = 28$

$\therefore$ $\boxed{c^2 = 28}$ للزائد والناقص (لهما نفس البؤرتين)

فيثاغورس: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 28 = 18 + b^2 \Rightarrow b^2 = 10$

معادلة الزائد : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1$

ومن ضرب طرفي المعادلة في 90 نحصل على :

$$5x^2 - 9y^2 = 90$$

وبالمقارنة مع المعادلة المعطاة $hx^2 - ky^2 = 90$

$$h = 5 \ , k = 9$$

س37: أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوريه منطبقين على محوري الاحداثيين وأن أحد رأسيه يبعد عن بؤرتيه بالبعدين 9 , 1

الحل : مجموع البعدين = 2c $\Leftarrow 2c = 10 \Leftarrow c = 5$

فرق البعدين = 2a $\Leftarrow 2a = 8 \Leftarrow a = 4$

فيثاغورس : $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 9$

إذا كان القطع سيني : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

وإذا كان القطع صادي : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

س38 : جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد $x^2 - 3y^2 = 12$ والذي النسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{5}{3}$.

الزائد : $x^2 - 3y^2 = 12 \xrightarrow{\div 12} \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

العدد الأول $a^2 = 12$

العدد الثاني $b^2 = 4$

فيثاغورس: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16$

$\therefore$ $c = 4$ سيني للزائد والناقص

الناقص : $c = 4$ سيني للزائد والناقص

النسبة بين طولي الناقص محوريه كنسبة $\frac{5}{3}$. $\Leftarrow$

$$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3} \Rightarrow a = \frac{5}{3}b \Rightarrow \boxed{a^2 = \frac{25}{9}b^2}$$

فيثاغورس للناقص:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{25}{9}b^2 = \frac{9}{9}b^2 + 16 \Rightarrow \frac{16}{9}b^2 = 16$$

$$\Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$a = \frac{5}{3}b \Rightarrow a = \frac{5}{3} \times 3 = 5$$

معادلة الناقص : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Q39 : النقطة $P(6, L)$ من نقط القطع الزائد

$x^2 - 3y^2 = 12$

أ) جد قيمة L

ب) جد طول نصف القطر البؤري الأيمن للقطع

الحل: النقطة $P(6, L)$ تحقق المعادلة

$x^2 - 3y^2 = 12 \Rightarrow (6)^2 - 3L^2 = 12 \Rightarrow 3L^2 = 24 \Rightarrow$

$L^2 = 8 \Rightarrow L = \pm\sqrt{8}$ or $L = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow P(6, \pm\sqrt{8})$

$36 - 3L^2 = 12 \Rightarrow L = \pm\sqrt{8} \Rightarrow P(6, \pm\sqrt{8})$

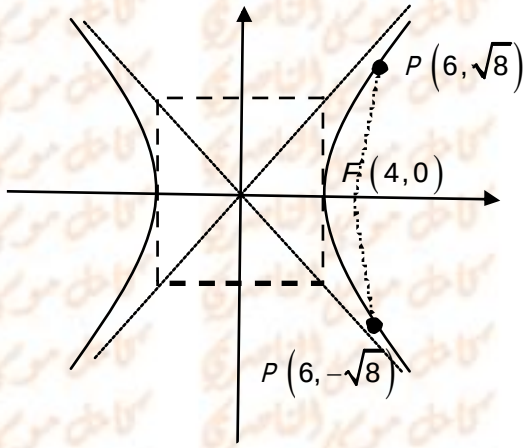
الزائد : $x^2 - 3y^2 = 12 \xrightarrow{\div 12} \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

العدد الأول $a^2 = 12$

العدد الثاني $b^2 = 4$

فيثاغورس: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16$

$\therefore$ $c = 4$ سيني للزائد ⇐ بؤرتا الزائد $(\pm 4, 0)$



$r_R = PF_1 = \sqrt{(6-4)^2 + (2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ units

---

س40 .(عامة) قطعان زائد وناقص كل منهما يمر من بؤرة الآخر فإذا كانت معادلة القطع الناقص هي $9x^2 + 25y^2 = 225$ فجد

أ) مساحة القطع الناقص ب) محيط القطع الناقص

جـ) معادلة القطع الزائد ثم ارسمه

د) الاختلاف المركزي لكل منهما.

الحل : الناقص $9x^2 + 25y^2 = 225 \xrightarrow{\div 225} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ On $\overleftrightarrow{x}$, $b^2 = 9$

$\Rightarrow b = 3$, $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c = 4$ On $\overleftrightarrow{x}$

مساحة القطع الناقص = $A = ab\pi = 15\pi$ square unit

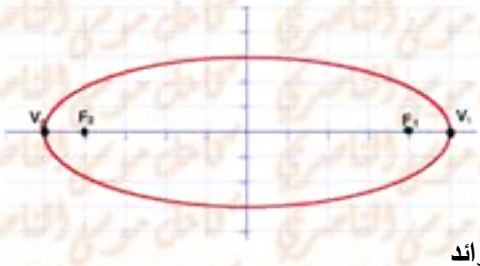
محيط القطع الناقص = $p \simeq 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} = 2\sqrt{17}\,\pi$ unit

القطع الناقص سيني بؤرتاه $(\pm 4, 0)$ ورأساه $(\pm 5, 0)$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص = $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

الناقص : $c = 4$, $a = 5$ ⇐ الزائد سيني وله :

$c = 5$, $a = 4$

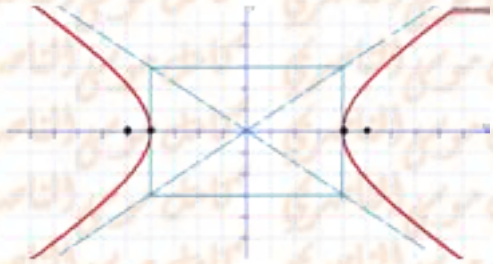


معادلة الزائد

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$

الزائد : بؤرتاه $(\pm 5, 0)$ ورأساه $(\pm 4, 0)$

اختلافه المركزي = $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$



Q41 : اذا علمت بأن $x^2 + y^2 = 1$

فبرهن أن $y\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2}\cdot\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$Solution.\ x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \xrightarrow{\div 2}$$

$$x + y\bullet\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x + y\bullet\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\Rightarrow 1 + y\bullet\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\bullet\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow y\bullet\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(y\bullet\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = \frac{d}{dx}(-1)$$

$$\Rightarrow y\bullet\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2}\bullet\frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^1\bullet\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$\Rightarrow y\bullet\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2}\bullet\frac{dy}{dx} = 0 \qquad Q.E.D.$$

قارن بين حلي السؤالين جيدا

Q42.

هل أن $2x^2 + y^2 = 1$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y^3\dfrac{d^2y}{dx^2} = -2$

$$Solution.\ 2x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(2x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\Rightarrow 4x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \xrightarrow{\div 2}$$

$$2x + y\bullet\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{y} \quad ...(1)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -2\left(\frac{y - x\bullet\frac{dy}{dx}}{y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -2\left(\frac{y - x\bullet\frac{-2x}{y}}{y^2}\bullet\frac{y}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -2\bullet\frac{\overbrace{y^2 + 2x^2}^{=1}}{y^3} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -2\bullet\frac{1}{y^3}$$

$$\Rightarrow y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -2 \qquad Q.E.D.$$

س43 : اذا كانت $y = \tan x$ فبرهن أن:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\left(1 + y^2\right)$$

ويمثل **Q5** من تمرين $(5-1)$

$$Solution.\ y = \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x = \tan^2 x + 1 = y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \quad \searrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\bullet\frac{dy}{dx} = 2y\left(y^2 + 1\right)$$

يتم المطلوب

Q44: برهن أن $y = ae^{-x}$ و حلا للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + y = 0$$

الحل:

$$y = ae^{-x}$$

$$\Rightarrow y' = -ae^{-x}$$

$$\Rightarrow y'' = \underbrace{ae^{-x}}_{y}$$

$$\Rightarrow y'' = y$$

يتم المطلوب

Q45 : برهن أن العلاقة $s = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حل للمعادلة

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$$

الحل:

$$s = 8\cos 3t + 6\sin 3t$$

$$\frac{ds}{dt} = -24\sin 3t + 18\cos 3t$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -72\cos 3t - 54\sin 3t$$

$$\Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -9\left(\underbrace{8\cos 3t + 6\sin 3t}_{=s}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -9s \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$$

يتم المطلوب

Q46: هل أن $y = x + 2$ هو حل للمعادلة

$$y'' + 3y' + y = x$$

الحل:

$$y = x + 2 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y'' = 0$$

$$L.H.S. = y'' + 3y' + y =$$

$$0 + 3(1) + x + 2 = x + 5 \neq R.H.S.$$

$\therefore\ y = x + 2$ لا يمثل حلا للمعادلة .

Q47: هل $yx = \sin 5x$ هو حل للمعادلة التفاضلية

$$xy'' + 2y' + 25xy = 0$$

الحل:

$$y \cdot x = \sin 5x \Rightarrow y \cdot 1 + x \cdot y' = 5\cos 5x$$

$$\Rightarrow y' + x \cdot y'' + y' = -25\underbrace{\sin 5x}_{x \cdot y} \Rightarrow$$

$$xy'' + 2y' + 25x \cdot y = 0$$

تحقق المطلوب فهي حلا للمعادلة التفاضلية.

Q48 برهن أن $xy = ae^x + be^{-x} + x^2$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$

$$Solution.\quad xy = ae^x + be^{-x} + x^2$$

$$\Rightarrow x\,y - x^2 = \boxed{ae^x + be^{-x}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\underbrace{x}_{i}\,\underbrace{y - x^2}_{ii}\right) = \frac{d}{dx}\left(ae^x + be^{-x}\right)$$

$$x \bullet \frac{dy}{dx} + y - 2x = ae^x - be^{-x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\underbrace{x}_{i} \bullet \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{ii} \oplus y - 2x\right) = \frac{d}{dx}\left(ae^x - be^{-x}\right)$$

$$x \bullet \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \oplus \frac{dy}{dx} - 2 = \underbrace{\boxed{ae^x + be^{-x}}}_{=x\,y - x^2}$$

$$x \bullet \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 2 = x\,y - x^2$$

$$x \bullet \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 2 - x\,y + x^2 = 0$$

$$Q.E.D.$$

Q49: إذا كان $y = x\sin x$ فبرهن أن

$$y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$$

$$Solution.\ y = \underbrace{x}_{i} \bullet \underbrace{\sin x}_{ii}$$

$$y' = \underbrace{x}_{i} \bullet \underbrace{\cos x}_{ii} + \sin x$$

$$y'' = x(-\sin x) + \cos x + \cos x$$

$$y'' = \underbrace{-x}_{i} \bullet \underbrace{\sin x}_{ii} + 2\cos x$$

$$y''' = -x\cos x + \sin x(-1) - 2\sin x$$

$$y''' = \underbrace{-x}_{i}\,\underbrace{\cos x}_{ii} - 3\sin x$$

$$y^{(4)} = x\sin x - \cos x - 3\cos x$$

$$y^{(4)} = \underbrace{x\sin x}_{=y} - 4\cos x$$

$$y^{(4)} = y - 4\cos x$$

$$y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$$

Q50: خزان مملوء بالماء على شكل مكعب طول حرفه $2\,m$ بدء الماء يتسرب منه بمعدل $0.4\,m^3/hr$ جد معدل تغير ارتفاع السائل في الخزان عند أي زمن t

الحل: ليكن حجم السائل في الخزان = $V \Leftarrow \frac{dv}{dt} = -0.4$

وليكن ارتفاع الماء في الخزان = $h \Leftarrow \frac{dh}{dt} = ?$

$$\therefore V = 4h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\frac{dh}{dt} \Rightarrow -0.4 = 4\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -0.1\ m/hr$$

$\therefore$ معدل انخفاض عمق السائل = $0.1\ m/hr$

Q51: صفيحة من المعدن الرقيق مستطيلة الشكل مساحتها تساوي $96\ cm^2$ يتمدد طولها بمعدل $2\ cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة، جد معدل النقصان في عرضها في اللحظة التي يكون فيها عرضها $8\ cm$.

الحل :

نفرض طول المستطيل x cm

نفرض طول المستطيل y cm

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 2\ cm/s \quad , \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

العلاقة :

$$96 = xy \text{ when } y = 8 \Rightarrow 96 = 8y \Rightarrow x = 12$$

$$96 = \underset{i}{x} \cdot \underset{ii}{y}$$

$$\Rightarrow 0 = x \cdot \frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow 0 = 12 \cdot \frac{dy}{dt} + 8 \cdot (2)$$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}\ cm/s$ = معدل تغير العرض

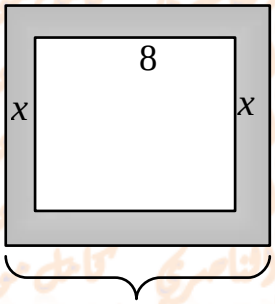
$\therefore$ معدل نقصان العرض = $+\frac{4}{3}\ cm/s$

Q52: مكعب صلد طول حرفه $8\ cm$ مغطى بطبقة من الجليد ، فإذا بدأ الجليد بالانصهار بمعدل $6cm^3/s$

فجد معدل تغير نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك $1\ cm$.

الحل : نفرض سمك الجليد في أية لحظة = $x\ cm$

والمطلوب $\frac{dx}{dt}$ عندما $x = 1$



نفرض حجم الجليد = $v\ cm^3$

= حجم المكعب المغطى بالجليد – حجم المكعب الأصلي

$$V_{snow} = (8+2x)^3 - 8^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3(8+2x)(2)\frac{dx}{dt}$$

وبالتعويض عن القيم المعطاة نحصل على:

$$-6 = 3(8+2\cdot 1)^2 \cdot 2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -0.01\ cm/s$$

أي معدل تغير سمك الجليد = $-0.01\ cm/s$

$\therefore$ معدل نقصان سمك الجليد = $+0.01\ cm/s$

Q53 : لتكن a نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة $(7, 0)$ يساوي $0.2\ unit/sec$ ، جد المعدل الزمني لتغير الإحداثي السيني للنقطة a عندما يكون $x = 4$.

الحل : لتكن $A(x, y)$ ولتكن $B(7,0)$

ولتكن المسافة بين A,B تساوي D

$$D = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow$$

$$D = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}$$

$$\overset{y^2=4x}{\Rightarrow} D = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x} \Rightarrow$$

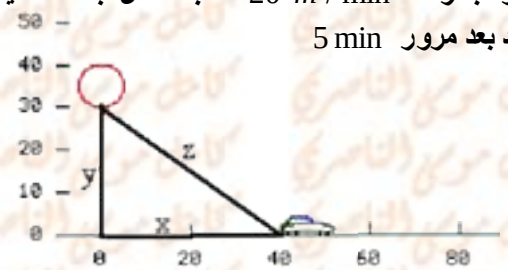
$$D = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x - 10}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}} \cdot \frac{dx}{dt} \overset{x=4\ ,\ \frac{dD}{dt} = 0.2}{\Rightarrow}$$

$$0.2 = \frac{8-10}{10} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -1\ unit\ /\ sec$$

Q55. منطاد يرتفع للأعلى بسرعة $15\ m/\min$ وفي نفس اللحظة ومن نفس الموقع على الأرض تنطلق سيارة بسرعة $20\ m/\min$ ، فجد معدل ابتعاد السيارة عن المنطاد بعد مرور $5\min$

الحل :



نفرض بعد السيارة عن نقطة البدء بعد مرور t ثانية $= x$

$$\frac{dx}{dt} = 20 \Leftarrow$$

نفرض بعد المنطاد عن الأرض في نفس اللحظة t $= y$

$$\frac{dy}{dt} = 15 \Leftarrow$$

نفرض البعد بين السيارة والمنطاد في نفس اللحظة t $= z$

$$\frac{dz}{dt} = ?$$

الإزاحة = السرعة × الزمن ، وعندما $t=5$ $\Leftarrow$

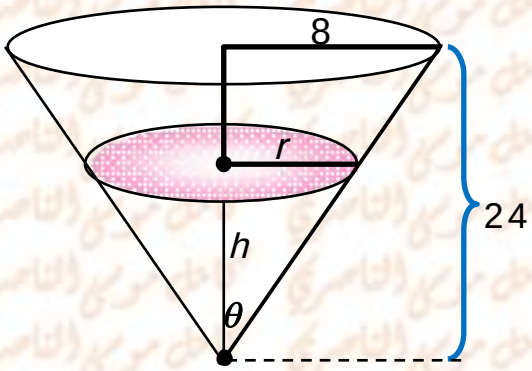
$$x = 20 \times t = 20 \cdot 5 = 100\ m$$

$$y = 15 \times t = 15 \times 5 = 75\ m$$

Q54 : إناء مخروطي قاعدته أفقية ورأسه للأسفل ارتفاعه يساوي $24cm$ وطول قطر قاعدته $16\,cm$ يصب فيه سائل بمعدل $5\ (cm)^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1\ cm^3/s$ ، جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل $12\ cm$.

الحل : نفرض بعدي السائل (نصف القطر $= r$ والارتفاع $= h$)

نفرض حجم السائل (وليس حجم المخروط) $= V$



في الشكل اعلاه من استعمال $\tan\theta$ أو تشابه مثلثين نحصل على

$$\tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{8}{24} \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{3}h}$$

$$V = \frac{1}{3} r^2 h\pi \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}h\right)^2 h\pi = \frac{1}{27}h^3\pi$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{27} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt}\ ,\ If\ h = 12,\ \frac{dV}{dt} = 4$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{\pi}{27} \cdot 3(12)^2 \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi} cm\ /\ s$$

تكملة Q55

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$If\ x = 100\ and\ y = 75 \Rightarrow z = 125$$

$$\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dt}\left(z^2\right)$$

$$\Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt} \xrightarrow{\div 2}$$

$$\Rightarrow x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = z\frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow 100 \cdot 20 + 75 \cdot 15 = 125 \cdot \frac{dz}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 25\ m\ /\ min$$

Q55. ناقش امكانية تطبيق مبرهنة رول لكل من الدوال التالية.

$Q1:\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 3 \quad in\ [1,3]$

الحل :

1. الاستمرارية : الدالة f مستمرة على الفترة المغلقة $[1,3]$ لأنها دالة كثيرة الحدود.

2. قابلية الاشتقاق: الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(1,3)$ لأنها دالة كثيرة الحدود.

3. يجب اثبات أن طرفي الوتر على بعد متساو من محور السينات وفي نفس الجهة.

$$\begin{cases} f(3) = f(b) = 27 - 54 + 33 - 3 = 3 \\ f(1) = f(a) = 1 - 6 + 11 - 3 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(3) = f(1)$$

$\therefore$ تحققت الشروط الثلاثة لمبرهنة رول لذا يستوجب ايجاد $c \in (1,3)$ وتحقق:

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 12c + 11 = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 132}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3} \Rightarrow c = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in (1,3)$$

$Q2:\ f(x) = \sin 2x \quad in\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل :

1. الاستمرارية : الدالة f مستمرة على الفترة المغلقة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ لأنها دالة sine .

2. قابلية الاشتقاق: قابلية الاشتقاق: الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ لأنها دالة sine

3. يجب اثبات أن طرفي الوتر على بعد متساو من محور السينات وفي نفس الجهة.

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(b) = \sin \pi = 0 \\ f(0) = f(a) = \sin 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0) = 0$$

$\therefore$ تحققت الشروط الثلاثة لمبرهنة رول لذا يمكن ايجاد $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ وتحقق:

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 2\cos 2c = 0 \Rightarrow$$

$$\cos 2c = 0 \Rightarrow 2c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$Q3:\ f(x) = \sin x + \cos x \quad in\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل :

1. الاستمرارية : $g(x) = \sin x$ ، $h(x) = \cos x$ مستمرتان على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$f(x)$ مستمرة على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (مجموع دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة)

2. قابلية الاشتقاق: $g(x) = \sin x$ ، $h(x) = \cos x$ قابلتان للاشتقاق على $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ لأنهما دالتي ...

$\therefore$ $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$(مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق هو دالة قابلة للاشتقاق)

3. يجب اثبات طرفي الوتر على بعد متساو من محور السينات وفي نفس الجهة.

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(b) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1 \\ f(0) = f(a) = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0) = 1$$

$\therefore$ تحققت الشروط الثلاثة لمبرهنة رول لذا يستوجب ايجاد $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ وتحقق:

$$f'(c) = 0 \Rightarrow \cos c - \sin c = 0 \Rightarrow$$

$$\cos c = \sin c \Rightarrow c = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\therefore$ تحققت مبرهنة رول.

$Q4:\ f(x)=\sqrt[3]{(x+2)^2}\ \ in\ [-10,6]$

الحل :

قابلية الاشتقاق: $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+2}}$

هنا $f'(-2)$ غير موجودة وأن

$-2\in(-10,6)$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-10,6)$

$\therefore$ لا تتحقق مبرهنة رووول.

$Q5:\ f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}\ \ in\ [-7,0]$

الحل :

1. الاستمرارية : $\forall a\in[-7,0]$,

$f(a)=\sqrt[3]{(a-1)^2}$

$\therefore$ $f(a)$ معرفة على $[-7,0]$ موجودة

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to a}(x-1)^2}=\sqrt[3]{(a-1)^2}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(x)\Leftrightarrow\ x=a$ مستمرة عند f

لكن a يمثل كل عنصر من عناصر $[-7,0]$ $\Leftarrow$ f مستمرة على $[-7,0]$

2. قابلية الاشتقاق:

$f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$

هنا $f'(x)$ موجودة $\forall x\in(-7,0)$

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-7,0)$

3. يجب اثبات طرفي الوتر على بعد متساو من محور السينات وفي نفس الجهة

$$\begin{cases} f(-7)=f(b)=4 \\ f(0)=f(a)=1 \end{cases}\Rightarrow f(-7)\neq f(0)$$

اخفق الشرط الثالث للمبرهنة ، لذا لا تتحقق مبرهنة رووول.

Q6. $f:[1,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+bx^2+ax$

دالة حقيقية تحقق مبرهنة رووول عند $c=2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

، فجد قيمة a , b

$$f(1)=f(3)$$
$$\Rightarrow 1+b+a=27+9b+3a$$
$$\Rightarrow a+4b+13=0 \qquad \ldots(i)$$
$$f'(x)=3x^2+2bx+a\Rightarrow$$
$$f'(c)=f'\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$=3\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+2b\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+a=0$$
$$\Rightarrow \underbrace{a+4b+13}_{a+4b+13=0}+\frac{2}{\sqrt{3}}(b+6)=0\Rightarrow b=-6$$
$$a+4b+13=0\ \ and\ \ b=-6\Rightarrow a=11$$

Q56. ناقش امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة لكل من الدوال التالية.

$Q1:\ f(x)=x(x+4)^2\ \ in\ [0,4]$

الحل : $f(x)=x^3+8x^2+16x$

1. الاستمرارية : الدالة f مستمرة على الفترة المغلقة $[0,4]$ لأنها دالة كثيرة الحدود.

2. قابلية الاشتقاق: $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,4)$ لأنها دالة كثيرة الحدود

إذا الدالة تحقق فرضيات نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة

يستوجب البحث عن نقطة c تنمي للفترة المفتوحة $(0,4)$ وتحقق: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\begin{cases} f(4)=f(b)=256 \\ f(0)=f(a)=0 \end{cases};$$

$$m_{secant}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{256-0}{4-0}=64$$

$$f'(c)=3c^2+16c+16=m_{tangent\ at\ C}$$

تكملة الفرع الاول من سؤال 56

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad Theorem$$

$$\Rightarrow 3c^2 + 16c + 16 = 64$$

$$\Rightarrow 3c^2 + 16c - 48 = 0 \ ,$$

$$c = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow c = \frac{-8 \pm 4\sqrt{13}}{3}$$

$$\therefore c = \frac{-8 + 4\sqrt{13}}{3} \cong 2.13 \in (0, 4)$$

$$Q2 : f(x) = x + \frac{1}{x} \ in \ [1, 3]$$

الحل : $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

1. الاستمرارية : من المقام $x = 0 \notin [1, 3]$

$\Leftarrow f(x)$ معرفة $x \in [1, 3]$

الدالة f مستمرة على الفترة المغلقة $[1, 3]$

2. قابلية الاشتقاق: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

هنا $f'(x)$ موجودة $\forall x \in (1, 3)$

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(1, 3)$

إذا الدالة تحقق فرضيات نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة

يستوجب البحث عن نقطة c تنمي للفترة المفتوحة $(0, 3)$

وتحقق: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$\begin{cases} f(3) = f(b) = \dfrac{10}{3} \\ f(1) = f(a) = 2 \end{cases} ;$$

$$m_{secant} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{10/3 - 2}{3 - 1} = \frac{2}{3}$$

$$f'(c) = 1 - \frac{1}{c^2} = m_{tangent \ at \ c}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad M.V.T. \ Theorem$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{c^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}$$

$$c = -\sqrt{3} \notin (1, 3)(rejected) \ , c = \sqrt{3} \in (1, 3)$$

هنا تحققت مبرهنة القيمة المتوسطة

Q57 . لتكن : $f : [a, 3] \to \mathbb{R}$ دالة وفق قاعدة

الاقتران $f(x) = 8x - x^2 + \ln 3$

ولتكن مبرهنة لاجرانج للقيمة المتوسطة تتحقق في النقطة c = - 1 x

، جد قيمة a .

$$Sol. \ f'(x) = 8 - 2x$$

$$f'(c) = 8 - 2c = 8 - 2(-1)$$

$$= 10 = m_{tangent \ at \ c}$$

$$\begin{cases} f(3) = f(b) = 15 + \ln 3 \\ f(a) = 8a - a^2 + \ln 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_{secant} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{15 - 8a + a^2}{3 - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad M.V.T. \ Theorem$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{15 - 8a + a^2}{3 - a} \Rightarrow$$

$$a^2 - 8a + 15 = 30 - 10a$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a - 15 = 0 \Rightarrow (a + 5)(a - 3) = 0$$

$$\Rightarrow a = -5 \ only$$

س 58 : جد تقريبا لكل مما يلي باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة أو نتيجتها.

$(a) \ \sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

$b = 63$

$a = 64 = 8^2 = 4^3$

$h = b - a = 63 - 64 = -1$

$$Let : f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$(1) \quad f(a) = f(64) = \left(8^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(4^3\right)^{\frac{1}{3}} = 12$$

$$(2) \quad f'(a) = f'(64) = \frac{1}{2}\left(8^{\cancel{2}}\right)^{-\frac{1}{\cancel{2}}} + \frac{1}{3}\left(4^{\cancel{3}}\right)^{-\frac{2}{\cancel{3}}}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{3 + 1}{48} = \frac{1}{12} = 0.083$$

$$(3) \quad \boxed{f(a + h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a)}$$

$$f(63) \simeq f(64) + (-1) f'(64) \simeq 12 - 0.083 = 11.917$$

$$\therefore \sqrt{63} + \sqrt[3]{63} \simeq 11.917$$

$(b)\ (1.04)^3 + 3(1.04)^4$

$b = 1.04$

$a = 1$

$h = b - a = 0.04$

$Let:\ f(x) = x^3 + 3x^4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x^3$

$(1)\quad f(a) = f(1) = 1 + 3 = 4$

$(2)\quad f'(a) = f'(1) = 3 + 12 = 15$

$(3)\quad \boxed{f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a)}$

$f(1.04) \simeq f(1) + (0.04) f'(1) \simeq 4 + (0.04) \times 15 = 4.6$

$\therefore\ (1.04)^3 + 3(1.04)^4 \simeq 4.6$

$(c)\ \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ Or $\sqrt[3]{9^{-1}}$

$b = 9$

$a = 8 = 2^3$

$h = b - a = 1$

$Let:\ f(x) = x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}$

$(1)\quad f(a) = f(8) = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$

$(2)\quad f'(a) = f'(8) = -\frac{1}{3}(2^{\cancel{3}})^{-\frac{4}{\cancel{3}}}$

$= -\frac{1}{3(16)} = -\frac{1}{48} = -0.0208 \simeq -0.021$

$(3)\quad \boxed{f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a)}$

$f(9) \simeq f(8) + (1) f'(8) \simeq 0.5 - 0.021 = 0.479$

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \simeq 0.479$

$(d)\ \frac{1}{101}\ ,\ b = 101\ ,\ a = 100\ ,\ h = b - a = 1$

$Let:\ f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$(1)\quad f(a) = f(100) = \frac{1}{100} = 0.01$

$(2)\quad f'(a) = f'(100) = -\frac{1}{10000} = -0.0001$

$(3)\quad \boxed{f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a)}$

$f(101) \simeq f(100) + (1) f'(100)$

$\simeq 0.0100 - 0.0001 = 0.099 \Rightarrow \frac{1}{101} \simeq 0.099$

e: كرة نصف قطرها **6 cm** طليت بطلاء سمكه $0.01\,cm$ جد كمية الطلاء بصورة تقريبية.

الحل: كمية الطلاء تمثل الزيادة في حجم الكرة = $\boxed{h \cdot f'(a)}$

$V = f(r) = \frac{4}{3} r^3 \pi$

$f'(r) = 4r^2 \pi$

$\boxed{b = 6.1\ ,\ a = 6,\ h = b - a = 0.1}$

$f'(a) = f'(6) = 4(6)^2 \pi = 144\pi$

$\Rightarrow h \cdot f'(a) = 0.1(144\pi) = 14.4\pi\ \ cm^3$

= كمية الطلاء التقريبية

--

f: مكعب طول حرفة $10\ cm$: مغطى بطبقة من الجليد بسمك $0.3\ cm$ جد كمية الجليد بصورة تقريبية.

الحل : كمية الجليد = مقدار الزيادة في حجم المكعب = مقدار التغير بدالة الحجم= $h \cdot f'(a)$

$V = f(x) = x^3$

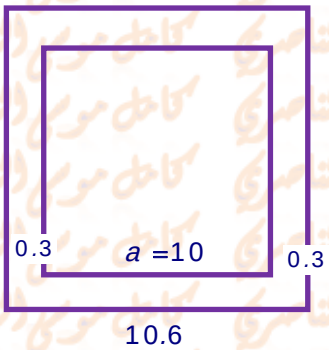
$f'(x) = 3x^2$

$b = 10.6$

$a = 10$

$h = b - a = 0.6$

$h \cdot f'(a) = (0.6) \cdot (3(10)^2) = 180\ cm^3$



G: مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته ، فإذا كان ارتفاعه يساوي **2.98 cm** فجد حجمه بصورة تقريبية.

$V=\frac{1}{3}r^2\pi h$ But $h=2r\Rightarrow r=\frac{1}{2}h$

$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}h\right)^2\pi h=\frac{\pi}{12}h^3$

$V=f(h)=\frac{\pi}{12}h^3 \Rightarrow f'(h)=\frac{\pi}{4}h^2$

$\boxed{b=2.98\ ,\ a=3\ ,\ h=b-a=-0.02}$

$(1)\quad f(a)=f(3)=\frac{\pi}{12}(3)^3=2.25\pi$

$(2)\quad f'(a)=f'(3)=\frac{\pi}{4}(3)^2=2.25\pi$

$(3)\quad \boxed{f(a+h)\simeq f(a)+h\cdot f'(a)}$

$V=f(2.98)\simeq f(3)+(-0.02)f'(3)$

$\simeq 2.25\pi+(-0.02)\times 2.25\pi=2.205\pi\ cm^3$

$\therefore\ V\simeq 2.205\pi\ cm^3$

h : كرة حجمها $84\pi\ cm^3$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية.

$V=\frac{4}{3}r^3\pi\Rightarrow 84\cancel{\pi}=\frac{4}{3}r^3\cancel{\pi}\Rightarrow r^3=84\left(\frac{3}{4}\right)=63$

$\Rightarrow r=\sqrt[3]{63}$ We must find it

$\sqrt[3]{63}$

$\boxed{b=63\ ,\ a=64=(4)^3\ ,\ h=b-a=-1}$

$Let:\ f(x)=x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$(1)\quad f(a)=f(64)=(4^3)^{\frac{1}{3}}=4$

$f'(x)$ ++++ 2 −−−−

$(2)\quad f'(a)=f'(64)=\frac{1}{3}(4^3)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{48}=0.021$

Mx

$(3)\quad \boxed{f(a+h)\simeq f(a)+h\cdot f'(a)}$

$f(63)\simeq f(64)+(-1)f'(64)$

$\simeq 4+(-1)(0.021)=3.979$

$\therefore\ r\simeq 3.979\ cm$

Q58: لتكن $f(x)=ax^2-6x+b$ جد قيمة $a\in\{-4,8\}$

في الحالة :- أ) الدالة محدبة ب) الدالة مقعرة

الحل:

$(a)\quad f'(x)=2ax-6\Rightarrow f''(x)=2a$

$\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow 2a<0\Rightarrow a=-4$

$(b)\quad f'(x)=2ax-6\Rightarrow f''(x)=2a$

$\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow 2a>0\Rightarrow a=8$

Q59 : اذا كانت $(2,6)$ هي نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x)=a-(x-b)^4$ فجد قيمة **a , b** وبين نوع النقطة الحرجة

$(2,6)$ من نقط الدالة فتحقق المعادلة :

$6=a-(2-b)^4\quad ...(1)$

المشتقة الأولى عند الحرجة تساوي صفر:

$f'(x)=-4(x-b)^3\Rightarrow f'(3)=-4(3-b)^3$

$\Rightarrow 0=-4(3-b)^3\Rightarrow b=3$

$6=a-(2-b)^4\quad ...(1)\Rightarrow 6=a-(2-q)^4$

$\Rightarrow a=6\Rightarrow \boxed{f(x)=6-(x-2)^4}$

نوع النقطة الحرجة:

$f'(x)=-4(x-2)^3\quad When\ f'(x)=0\Rightarrow x=2$

$f'(x)$ ++++ 2 −−−−

Mx

من المخطط المجاور نستنتج أن $(2,6)$ هي نقطة نهاية عظمى محلية

Q60: لتكن $x \neq 0$, $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ ،

(1) برهن أن الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية مهما تكن قيمة a

(2) جد قيمة a لو كان للدالة نقطة انقلاب عند x =-1

الحل: $(1)\ f(x) = x^2 - \frac{a}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x + \frac{a}{x^2}$

$0 = 2x + \frac{a}{x^2} \Rightarrow \frac{a}{x^2} = -2x \Rightarrow 2x^3 = -a$

$\Rightarrow x^3 = -\frac{a}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{a}{2}}$ = C.N.

$f''(x) = 2 - \frac{2a}{x^3} \Rightarrow$

$f''\left(\sqrt[3]{-\frac{a}{2}}\right) = 2 - \frac{2a}{\frac{-a}{2}} = 2 + 4 = 6 > 0$ تقعر

توجد نهاية صغرى محلية عند العدد الحرج فلا توجد نهاية عظمى محلية

$(2)\ f''(x) = 2 - \frac{2a}{x^3} \Rightarrow f''(-1) = 2 - \frac{2a}{-1}$,

$\because f''(-1) = 0 \Rightarrow 2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$

Q61 : المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند النقطة $(2,-1)$ وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيمة $a,b,c \in \mathbb{R}$.

الحل : 1) عند $x = \frac{1}{2}$ توجد نقطة حرجة:

$y'(x) = 2ax + b \Rightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right) = a + b \Rightarrow a + b = 0 \quad ...(1)$

2) $(2,-1)$ نقطة تمس تحقق معادلة المنحني:

$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow -1 = 4a + 2b + c \quad ...(2)$

١) المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$

عند النقطة $(2,-1)$ $\Leftarrow m_1 = m_2$

$m_1 : \quad 3x - y = 7 \Rightarrow 3 - \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3 = m_1$

$m_2 : y = ax^2 + bx + c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2ax + b$

$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{at\ (2,-1)} = 4a + b = m_2$

$m_1 = m_2 \Rightarrow \quad 3 = 4a + \cancel{b} \quad ...(3)$

$0 = \mp a \mp \cancel{b} \quad ...(1)$

$3a = 3 \Rightarrow a = 1 \quad \Rightarrow b = -1$

$But : -1 = 4a + 2b + c \Rightarrow -1 = 4 - 2 + c \Rightarrow c = -3$

Q62. عين قيمتي الثابتين a,b لكي يكون للمنحني $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند x =- 1 ونهاية صغرى محلية عند x = 2 ثم جد نقطة الانقلاب.

الحل:

نهاية عظمى محلية عند x =- 1 $\Leftarrow$ C.N.=-1 $\Leftarrow$

$f'(-1) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow 0 = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b$

$\Rightarrow 0 = 3 - 2a + b \quad .....(1)$

نهاية صغرى محلية عند x = 2 $\Leftarrow$ C.N.=2 $\Leftarrow$

$f'(2) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow 0 = 3(2)^2 + 2a(2) + b$

$\Rightarrow 0 = 12 + 4a + b \quad .....(2)$

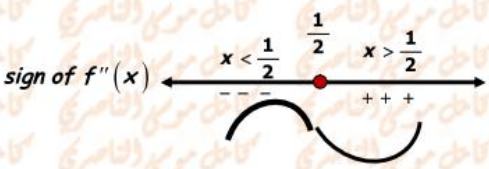
$0 = {}^{-}3 - {}^{+}2a + {}^{-}b \quad .....(1)$

بطرح المعادلتين نحصل على : $a = -\frac{3}{2}\ , b = -6$

لذا تكون معادلة المنحني : $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$

لنجد نقطة الانقلاب: $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$

$f''(x) = 6x - 3 \Rightarrow Let\ f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$



من خط اعداد المشتقة الثانية نستنتج عند $x = \frac{1}{2}$ توجد نقط انقلاب

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right) =$ نقطة الانقلاب

Q63. إذا كان للدالة $f(x)=ax^3+3x^2+c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ونقطة انقلاب عند x = 1 فجد قيمة a ,c .

الحل : عند x = 1 توجد نقطة انقلاب $\Leftarrow f''(1)=0$

$$f'(x)=3ax^2+6x \Rightarrow f''(x)=6ax+6 \Rightarrow f''(1)=6a+6$$

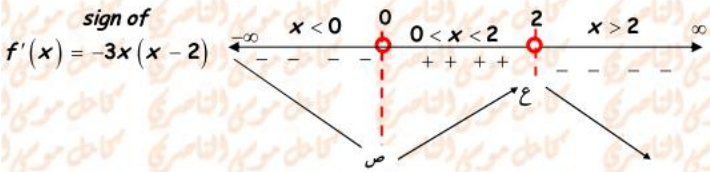
$$\Rightarrow 6a+6=0 \Rightarrow a=-1 \qquad \boxed{f(x)=-x^3+3x^2+c}$$

8 = نهاية عظمى محلية $\Leftarrow$ y= 8 لذا وجب البحث عن xالمناسبة

$$f(x)=-x^3+3x^2+c$$

$$f'(x)=-3x^2+6x \Rightarrow If \quad f'(x)=0$$

$$\Rightarrow -3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \quad or \quad x=2 \ critical \ numbers$$



من خط أعداد المشتقة الاولى نستنتج أن $(2,8)$ هي نقطة النهاية المحلية وكل نقطة من نقط الدالة تحقق معادلة المنحني

$$f(x)=-x^3+3x^2+C$$

$$8=-(2)^3+3(2)^2+C \Rightarrow C=4$$

Q64. إذا كان المستقيم $3x-y-7=0$ يمس المنحني $y=ax^2+bx+c$ عند النقطة $(2,-1)$ ، وله نقطة نهاية محلية عند $x=\frac{1}{2}$ فجد a, b and c وما نوع النهاية المحلية

الحل: النقطة $(2,-1)$ هي نقطة تماس لذا تحقق معادلة المنحني

$$y=ax^2+bx+c \Rightarrow \boxed{-1=4a+2b+c \quad ...(1)}$$

: النقطة $(2,-1)$ هي نقطة تماس لذا ميلا المماس والمنحني متساويان عندها.

$$\begin{cases} 3x-y-7=0 \\ 3-y'-0=0 \\ y'=3=m_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y'=2ax+b \\ y'_{at(2,-1)}=4a+b=m_1 \end{cases}$$

$$m_1=m_2$$

$$\boxed{4a+b=3 \quad ...(2)}$$

للمنحني نقطة نهاية محلية عند $x=\frac{1}{2} \Leftarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$$y=f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b \Rightarrow$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=a+b \Rightarrow \boxed{0=a+b \quad ...(3)}$$

الحل انيا :

$$4a+b=3 \quad ...(2)$$

$$a+b=0 \quad ...(3)$$

$$3a=3 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow c=-3$$

$$\therefore y=f(x)=x^2-x-3$$

$$f'(x)=2x-1 \Rightarrow f''(x)=2 \Rightarrow f''(x)=2>0$$

من طريقة فحص النهايات باستخدام المشتقة الثانية نستنتج أن : عند $x=\frac{1}{2}$ توجد نهاية صغرى محلية.

Q65. جد النهاية المحلية للدالة :

$$(1)\ f(x)=x^2-\frac{16}{x}, \ x\neq 0$$

$$Sol. \quad f'(x)=2x+\frac{16}{x^2} \quad If \ f'(x)=0 \Rightarrow 2x+\frac{16}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow 2x=\frac{-16}{x^2} \Rightarrow x^3=-8 \Rightarrow x=-2 \ Critical \ number$$

$$f'(x)=2x+\frac{16}{x^2} \Rightarrow f''(x)=2-\frac{32}{x^3}$$

$$\Rightarrow f''(-2)=2+4=6>0$$

أي المنحني في وضع تقعر عند العدد الحرج لذا توجد نهاية صغرى محلية عند هذا العدد.

$$f(x)=x^2-\frac{16}{x} \Rightarrow f(-2)=4+8=12$$

$\therefore$ 12 = نهاية صغرى محلية

$$(2)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2}$$

$$Solution.\ f(x)=x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\neq 0$$

تكون المشتقة غير معرفة عندما x = 0 وتمثل العدد الحرج

من خط أعداد المشتقة الأولى نستنتج عند x = 0

توجد نهاية صغرى محلية

نهاية صغرى محلية = f(0) = 0

ارسم باستخدام معلوماتك بالتفاضل الدوال التالية:

.Q66 $f(x) = 10 - 3x - x^2$

٧. أوسع مجال = $\mathbb{R}$

٨. المحاذيات : لا توجد لإن الدالة غير كسرية

٩. التناظر : لا يوجد تناظر لا مع الصادات ولا حول نقطة الاصل لأن $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq f(x)$

١٠. التقاطع : a. مع محور السينات (y = 0)

$$0 = 10 - 3x - x^2 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x+5)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -5 \ or \ x = 2$$

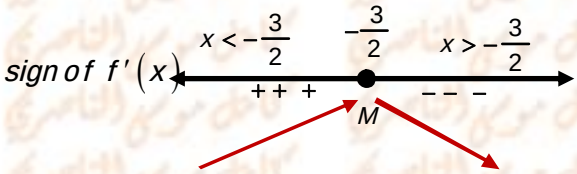
$$P_1(-5, 0), P_2(3, 0)$$

b. مع محور الصادات (x = 0)

$$y = f(0) = 10 - 0 - 0 = 10 \Rightarrow P_3(0, 10)$$

١١. سلوك الدالة عن طريق المشتقة الاولى:

$$f'(x) = -3 - 2x \ ; \ If \ f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$



f متزايدة على : $\left\{x : x < -\frac{3}{2}\right\}$

f متناقصة على : $\left\{x : x > -\frac{3}{2}\right\}$

نهاية عظمى محلية

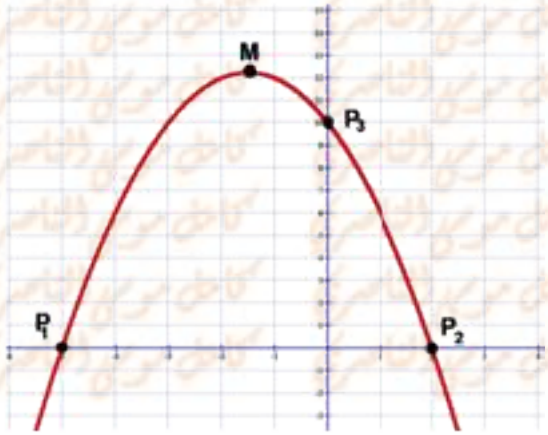
$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{49}{4} = M =$$

$M\left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right) P_4$ هي نقطة نهاية عظمى محلية

١٢. سلوك الدالة عن طريق المشتقة الثانية:

$$f'(x) = -3 - 2x \Rightarrow f''(x) = -2 < 0$$

$\therefore$ f محدبة في $\mathbb{R}$ لذا لا توجد نقطة انقلاب



.Q67 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

١. أوسع مجال = $\mathbb{R}$

٢. المحاذيات : لا توجد لإن الدالة غير كسرية

٣. التناظر : لا يوجد تناظر لا مع الصادات ولا حول نقطة الاصل لأن $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq f(x)$

٤. التقاطع : a. مع محور السينات (y = 0)

معادلة من الدرجة الثالثة يصعب تحليلها

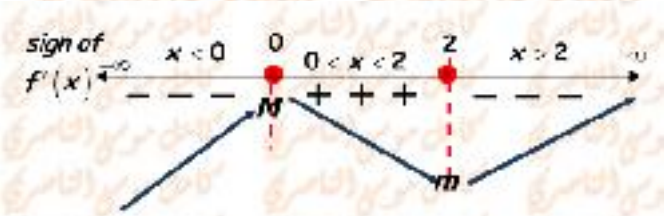
b. مع محور الصادات (x = 0)

$$y = f(0) = 4 \Rightarrow P(0, 4)$$

٥. سلوك الدالة عن طريق المشتقة الاولى:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad If \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0$$

$$Either \quad x = 0 \quad or \quad x = 2 \quad critical \ numbers$$



f متناقصة: $\forall x < 0 \ (2)$, $\forall x > 2 \ (1)$

f متزايدة على الفترة المفتوحة $(0, 2)$

عوض بالدالة فقط لإيجاد النهايات:

نهاية عظمى محلية $= M = f(0) = 4$

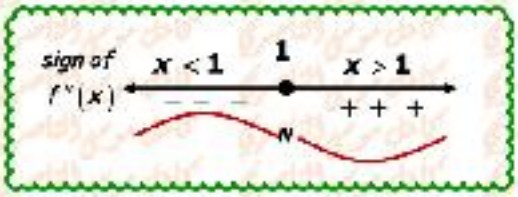
$\therefore$ M $P_2(0, 4)$ نقطة نهاية عظمى محلية

نهاية صغرى محلية $= m = f(2) = 0$

$\therefore$ m $P_3(2, 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

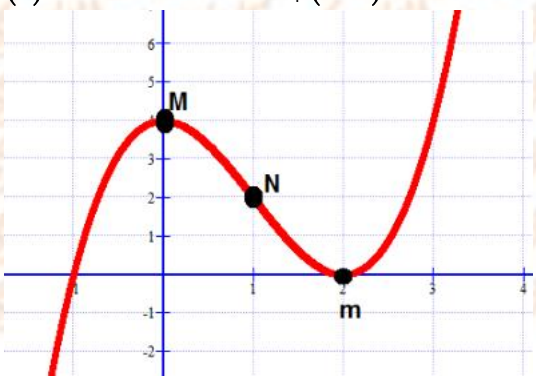
٦. سلوك الدالة باستخدام المشتقة الثانية:

$$f'(x) = 6x - 6 \quad If \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$



f محدبة : $\forall x < 1$ ..... f مقعرة : $\forall x > 1$

نقطة انقلاب $= P_4(1, 2) \Rightarrow f(1) = 1 - 3 + 4 = 2$



ملاحظة مهمة جدا : اذا كانت الدالة معرفة بالقاعدة التالية. $f(x)=(x+1)(x-2)^2$ فالحل كما يلي:

١. أوسع مجال = $\mathbb{R}$
٢. المحاذيات : لا توجد لإن الدالة غير كسرية
٣. التناظر : لا يوجد تناظر لا مع الصادات ولا حول نقطة الاصل لأن $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq f(x)$
٤. التقاطع : a. مع محور السينات (y = 0) $\Leftarrow 0=(x+1)(x-2)^2 \Leftarrow x=-1 \text{ or } x=2 \Leftarrow (-1,0),(2,0)$
b. مع محور الصادات (x = 0)

$$y=f(0)=4 \Rightarrow P(0,4)$$

٥. سلوك الدالة عن طريق المشتقة الاولى: $f(x)=(x+1)(x-2)^2=(x+1)(x^2-4x+4)$

$\boxed{f(x)=x^3-3x^2+4}$ فهو نفس السؤال 67 ، اي باقي الحل هو نفسه في السؤال السابق.

Q68. $f(x)=(1-x)^3+1$

1. أوسع مجال = $\mathbb{R}$
2. المحاذيات لا توجد لأن الدالة غير كسرية .
3. التناظر : لا يوجد تناظر لا مع الصادات ولا حول نقطة الأصل لأن: $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$
4. التقاطع : a) مع محور السينات :

$$y=0 \Rightarrow 0=(1-x)^3+1 \Rightarrow -1=(1-x)^3$$
$$\Rightarrow 1-x=-1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P_1(2,0)$$

b) مع محور الصادات :

$$x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow P_2(0,2)$$

5. $f'(x)=-3(1-x)^2$, $0=-3(1-x)^2$

العدد الحرج = $\Rightarrow x=1$

$f'(x)$		1	
	- - -		- - -
	↘		↘

f متناقصة : $\forall x>1$ ، $\forall x<1$

لا توجد نقطة نهاية محلية لان الدالة متناقصة فقط

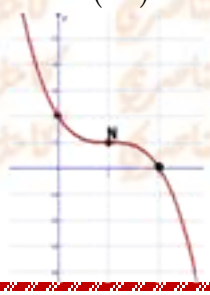
6. $6(1-x)=0$, $f''(x)=6(1-x)$

مرشحة للانقلاب $\Rightarrow x=1$

$f''(x)$		1	
	+ + +		- - -

f مقعرة: $\forall x<1$ ،،، f محدبة : $\forall x>1$

نقطة انقلاب = $f(1)=1 \Rightarrow (1,1)$



Q69. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

1. أوسع مجال = $\mathbb{R}/\{-1\}$
2. المحاذيات : x = -1 محاذي عمودي ، y = 1 محاذي افقي
3. التناظر : لا يوجد تناظر لا مع الصادات ولا حول نقطة الأصل لأن: $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$
4. التقاطع : a) مع محور السينات :

$$y=0 \Rightarrow 0=x-1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$$

b) مع محور الصادات :

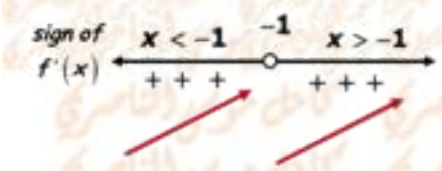
$$x=0 \Rightarrow f(0)=-1 \Rightarrow (0,-1)$$

5. سلوك الدالة عن طريق المشتقة الاولى

$$f'(x)=\frac{(x+1)\cdot 1-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}\neq 0$$

لذا لا توجد نهاية محلية ولا نقطة حرجة

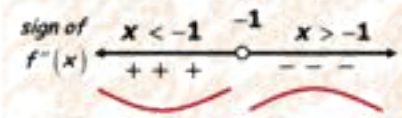
f غير معرفة عند x = -1



f متزايدة : $(1)\forall x<-1$, $(2)\forall x>-1$

لماذا لا يمكن القول متزايدة في $\mathbb{R}/\{-1\}$ ؟؟؟!!!

6. لذا لا توجد نقطة انقلاب $f''(x)=\dfrac{-4}{(x+1)^3}\neq 0$



f محدبة : $\forall x>-1$ ،،،، f مقعرة : $\forall x<-1$

تكملة السؤال 69

7. نقط مساعدة

$x < -1$

x	y
-2	3
-3	2

$x > -1$

x	y
0	-1
1	0

Q70: جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن.

الحل : 1- نفرض العددين x , y

2- $x + y = 75 \Rightarrow y = 75 - x$

3- حاصل الضرب = P : $P = x^2 \cdot y$

4- $P = x^2 \cdot y = x^2(75 - x) \Rightarrow$

$p = f(x) = 75x^2 - x^3$

5- $f'(x) = 150x - 3x^2$

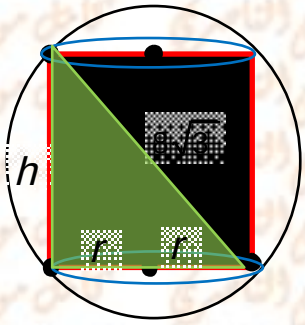
6- $0 = 3x(50 - x) \Rightarrow x = 50 \Rightarrow y = 25$

$f''(x) = 150 - 6x \Rightarrow f''(50) = 150 - 300 < 0$

لذا لدالة حاصل الضرب نهاية عظمى محلية

Q71 : جد ارتفاع أكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن أن توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}$ cm

الحل: نفرض بعدي الاسطوانة r , h cm.



2. $(2r)^2 + h^2 = (8\sqrt{3})^2 \Rightarrow 4r^2 = 192 - h^2$

$\Rightarrow \boxed{r^2 = \frac{1}{4}(192 - h^2)}$

3. $V = r^2\pi \cdot h$

4. $V = \pi h \cdot \frac{1}{4}(192 - h^2)$

5. $V = \frac{\pi}{4}(192h - h^3) = f(h)$

6. $f'(h) = \frac{\pi}{4}(192 - 3h^2)$

$0 = \frac{3\pi}{4}(64 - h^2) \Rightarrow h = 8\ cm$

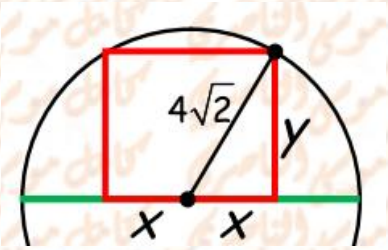
$test\ :\ f''(h) = \frac{\pi}{4}(-6h) \Rightarrow f''(8) = -12\pi < 0$

وهذا يثبت بأن لدالة الحجم نهاية عظمى محلية عندما الارتفاع $h = 8\ cm$

Q71: جد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}\ cm$

الحل:

نفرض بعدي المستطيل 2x , y cm



العلاقة $x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow y = \sqrt{32 - x^2}$

مساحة المستطيل : $A = 2x \cdot y$

الدالة

$A = 2x \cdot \sqrt{32 - x^2} = 2\sqrt{x^2(32 - x^2)}$

$= \boxed{2\sqrt{32x^2 - x^4} = f(x)}$

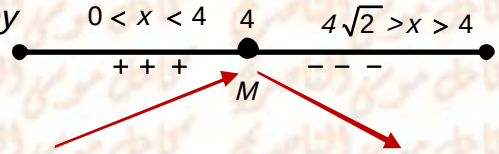
$f'(x) = 2 \cdot \frac{64x - 4x^3}{2\sqrt{32x^2 - x^4}}$ When $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 64x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(16 - x^2) \Rightarrow x = 4$

$y = \sqrt{32 - x^2} \Rightarrow y = \sqrt{32 - 16} = 4$

بعدي أكبر مستطيل : $8\ cm\ ,\ 4\ cm$

test by $f'(x)$



Q72 : س5: جد أقل محيط لمستطيل مساحته $16\ cm^2$

الحل : نفرض بعدي المستطيل x, y cm

العلاقة : مساحة ألمستطيل

$$A = x \cdot y \Rightarrow 16 = x \cdot y \Rightarrow \boxed{y = \frac{16}{x}}$$

المحيط = (طول + عرض) ×2

$$S = 2(x+y) \Rightarrow S = 2\left(x + \frac{16}{x}\right) = f(x)$$

$$f'(x) = 2\left(1 - \frac{16}{x^2}\right) \quad When\ f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

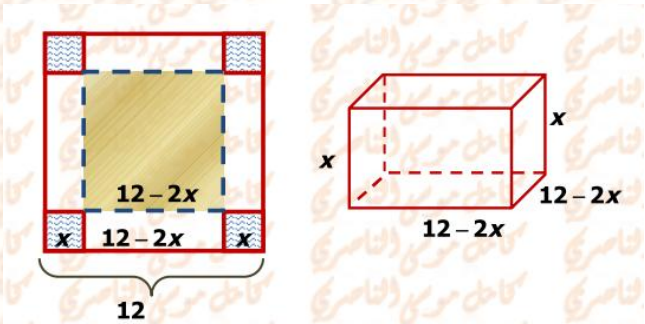
$$f''(x) = \frac{64}{x^3} \quad \Rightarrow f''(4) = \frac{64}{64} > 0$$

وهذا يعني أن لدالة المحيط نهاية صغرى محلية

أصغر محيط $f(x) = 2\left(x + \frac{16}{x}\right) \Rightarrow f(4) = 2\left(4 + \frac{16}{4}\right) = 16\ cm =$

Q73: صنع صندوق من قطعة قماش مربعة الشكل طول ضلعها 12 cm وذلك بقص مربعات متساوية من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة منها، جد اكبر حجم لهذه العلبة.

الحل : نفرض طول ضلع المربع المقطوع = x cm



∴ أبعاد العلبة هي : $x\ ,\ 12-2x\ ,\ 12-2x$

حجم متوازي سطوح مستطيلة = طول×عرض×ارتفاع

$$V = (12-2x)\cdot(12-2x)\cdot x = x\left(144 - 48x + 4x^2\right)$$

$$= 144x - 48x^2 + 4x^3 = f(x)$$

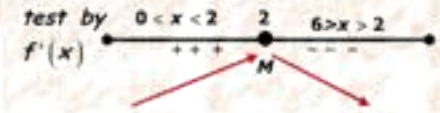
$$f'(x) = 12x^2 - 96x + 144 \to 0 \quad , \boxed{Doain = (0,6)}$$

$$\Rightarrow 12\left(x^2 - 8x + 12\right) = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x-2) = 0 \Rightarrow Either\ \underbrace{x = 6}_{6 \notin (0,6)} \quad or \quad x = 2\ cm$$

$$V = f(x) = x(12-2x)^2 \Rightarrow$$

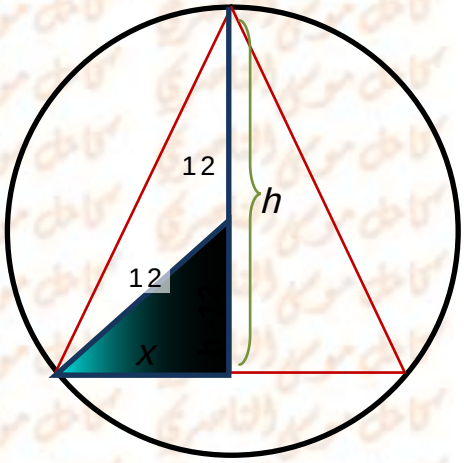
$$f(2) = 2(12-4)^2 = 128\ cm^3\ the\ greatest\ volume$$



Q74: جد بعدي اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن أن يوضع داخل دائرة نصف قطرها 12 cm .

الحل:

١. نفرض بعدي المثلث : قاعدة = 2x ، ارتفاع = h



٢. العلاقة : $(12)^2 = x^2 + (h-12)^2$

$$\cancel{144} = x^2 + h^2 - 24h + \cancel{144} \Rightarrow x^2 = 24h - h^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \sqrt{24h - h^2}}$$

٣. قانون (مساحة المثلث) : $A = \frac{1}{2}(2x)\cdot h = x \cdot h$

٤. تعويض: $A = x \cdot h = h\sqrt{24h - h^2}$

٥. تبسيط:

$$A = \sqrt{h^2\left(24h - h^2\right)} \Rightarrow \boxed{f(h) = \sqrt{24h^3 - h^4}}$$

٦. ايجاد المشتقة من اجل معرفة العدد الحرج:

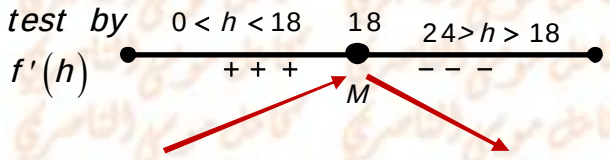
$$f(h) = \sqrt{24h^3 - h^4}$$

$$f'(h) = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} \quad , Let\ f'(h) = 0$$

$$\Rightarrow 72h^2 - 4h^3 = 0 \Rightarrow 4h^2(18 - h) = 0 \Rightarrow \boxed{h = 18}\ cm$$

$$x = \sqrt{24h - h^2} = \sqrt{24 \cdot 18 - 18 \cdot 18} = \sqrt{6 \cdot 18} = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore 2x = \boxed{12\sqrt{3}}\ cm = The\ 2^{nd}\ dimension$$



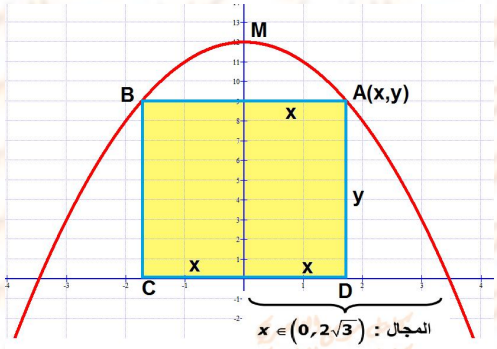
Q75. جد أكبر مساحة لمستطيل يمكن ان يوضع داخل المنطقة المحددة بالمنحني $f(x)=12-x^2$ وبمحور السينات.

الحل : يرسم المنحني أولا: $f'(x)=-2x=0 \Rightarrow x=0$

$$f''(x)=-2 \Rightarrow f''(0)=-2<0$$

وهذا يعني بطريقة اختبار المشتقة الثانية أن للدالة نهاية عظمى محلية

$$f(0)=12=M \Rightarrow (0,12)=M$$



نفرض الرأس $A(x,y)$

$\therefore$ بعدي المستطيل $2x, y$

$$A=2x\cdot y \Rightarrow A=2x\left(12-x^2\right) \Rightarrow \boxed{f(x)=2\left(12x-x^3\right)}$$

أكمل الحل

Q76: جد النقط المنتمية للمنحني $y^2-x^2=3$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0,4)$

الحل نفرض النقطة $P(x,y)$ ، ونفرض بعدها عن $H(0,4)$

يساوي $L \Leftarrow$ العلاقة هي $\boxed{x^2=y^2-3}$

$$L=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}=\sqrt{\underbrace{x^2}_{=y^2-3}+y^2-8y+16}$$

$$\Rightarrow L=\sqrt{2y^2-8y+13}=f(y)\ ,\ D=\mathbb{R}$$

$$f'(y)=\frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}}\ ,,,\ If\ f'(y)=0$$

$$\Rightarrow 4y-8=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$$

$$\Rightarrow P(\pm1,2)$$

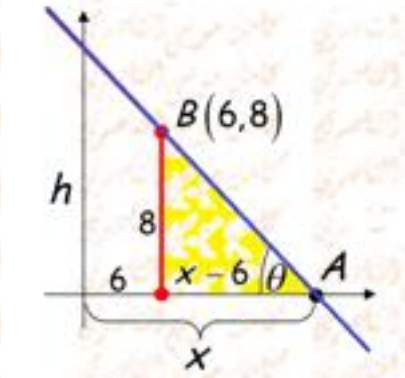
test by

$f'(y)$: $y<2$ | 2 | $y>2$

$- - -$ | $+ + +$

m

Q77. جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة $B(6,8)$ والذي يصنع مع المحورين في الربع الأول أصغر مثلث .



نفرض بعدي المثلث x , h

العلاقة

$$\tan\theta=\frac{8}{x-6}=\frac{h}{x} \Rightarrow \boxed{h=\frac{8x}{x-6}}$$

قانون (الدالة): مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$$A=\frac{1}{2}x\cdot h=\frac{1}{2}x\cdot\frac{8x}{x-6}=\boxed{\frac{4x^2}{x-6}=f(x)}$$

$$f'(x)=\frac{(x-6)\cdot 8x-4x^2}{(x-6)^2}\ ,,,\ If\ f'(x)=0$$

$$\Rightarrow (x-6)\cdot 8x-4x^2=0 \Rightarrow 4x^2-48x=0$$

$$\Rightarrow 4x(x-12)=0 \Rightarrow x=12 \Rightarrow A(12,0)$$

test by

$f'(x)$: $0<x<12$ | 12 | $x>12$

$- - -$ | $+ + +$

m

نجد ميل المستقيم AB

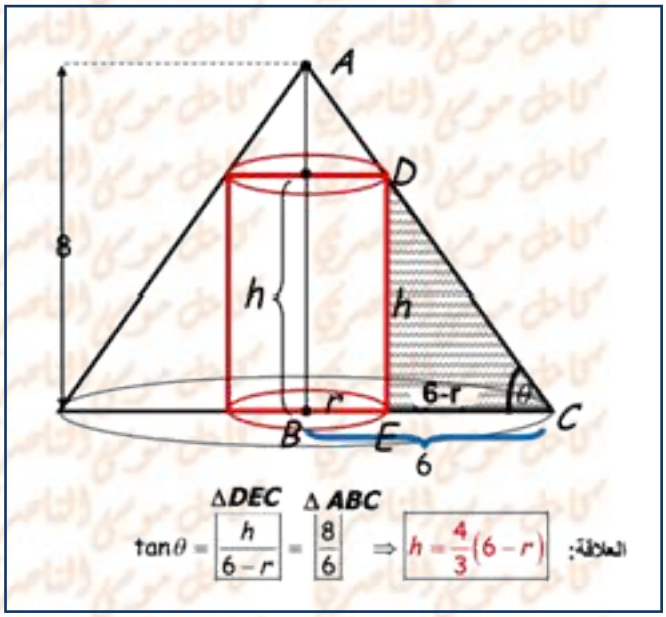
$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{8-0}{6-12}=-\frac{4}{3}$$

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow -\frac{4}{3}=\frac{y-0}{x-12}$$

$$\Rightarrow 4x+3y-48=0\ \ the\ \ equation\ \ of\ \ the\ \ line$$

Q78. : جد أبعاد أكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8 cm وطول قطر قاعدته 12 cm

الحل: ١. نفرض بعدي الاسطوانة $r\ cm\ ,\ h\ cm$



٣. حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع ⇐

$$V = r^2\pi \bullet h$$

4. $V = r^2\pi \bullet \frac{4}{3}(6-r)$

5. $V = \frac{4\pi}{3}\left(6r^2 - r^3\right) = f(r)\ ,\ with\ domain(0\ ,6)$

6. $f'(r) = \frac{4\pi}{3}\left(12r - 3r^2\right)\ ,\ ,\ ,\ if\ \ f'(r) = 0$

$\Rightarrow 3r(4-r) = 0 \Rightarrow r = 4\,cm \Rightarrow h = \frac{4}{3}(6-4) = \frac{8}{3}cm$

اختبار المشتقة الثانية:

$f''(r) = \frac{4\pi}{3}(12-6r) \Rightarrow f''(r) = \frac{4\pi}{3}(12-6\bullet 4) = -16\pi < 0$

و هذا يعني لدالة الحجم نهاية عظمى محلية عندما r = 4

Q78. جد قيمة $\int_2^5 f(x)\,dx$ حيث $f(x) = 2x - 3$ مستعملا تجزيئا تختاره انت ثم حقق الناتج هندسيا

الحل : $f(x) = 2x - 3$ يمثل خطا مستقيما من الدرجة الاولى، $f'(x) = 2 > 0$ لذا لا يوجد عدد حرج

تقاطع المستقيم مع محور السينات : $y = 2x - 3 \Rightarrow 0 = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin [2,5]$ لذا لا يوجد تقاطع مع السينات

يمكن استعمال التجزئ $\sigma = (2,3,5)$ لذا فالفترات الجزئية هي $I_1 = [2,3]\ ,\ I_2 = [3,5]$

الفترة الجزئية $I_i = [a\ ,\ b]$	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i = أصغر قيمة	M_i = أعظم قيمة	مساحة مستطيل أدنى $A_i = h_i \times m_i$	مساحة مستطيل أعلى $A_i = h_i \times M_i$
$I_1 = [2,3]$ $f(2) = 1 = m_1$ $f(3) = 3 = M_1$	1	1	3	1	3
$I_2 = [3,5]$ $f(3) = 3 = m_2$ $f(5) = 7 = M_2$	2	3	7	6	14
				$L(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{2} h_i \bullet m_i = 7$	$U(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{2} h_i \bullet M_i = 17$

$$\int_2^3 (2x-3)\,dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{7+17}{2} = 12 \qquad (3)$$

هندسيا: ارسم الشكل (p169 كتاب مدرسي) تلاحظ المنطقة بين المستقيم ومحور السينات عبارة عن شبه منحرف قاعدتاه المتوازيتان طولاهما 1 , 7 وارتفاعه 3 لذا المساحة = نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع = $\frac{1}{2}(1+7)\bullet 3 = 12$ ويمثل التكامل المطلوب.

Q79. جد قيمة تقريبية لـ $\int_0^4 \left(3x - x^2\right) dx$ مستعملا أربع تجزئات منتظمة

الحل : طول كل فترة جزئية = h ، $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1 \Leftarrow \sigma = (0,1,2,3,4)$

لذا تكون الفترات الجزئية هي : $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$ و ألان نجد العدد الحرج

$$f(x) = 3x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 3 - 2x \;,\;,\;, \quad 3 - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2} \in [1,2]}$$

الفترة الجزئية $I_i = [a, b]$	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i = أصغر قيمة	M_i = أعظم قيمة	مساحة مستطيل أدنى $A_i = h_i \times m_i$	مساحة مستطيل أعلى $A_i = h_i \times M_i$
$I_1 = [0,1]$ $f(0) = 0 = m_1$ $f(1) = 1 = M_1$	1	0	1	0	1
$I_2 = [1,2]$ $f(1) = 1 = m_2$ $f(2) = 2$ $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} = M_2$	1	1	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{9}{4}$
$I_3 = [2,3]$ $f(2) = 2 = M_3$ $f(3) = 0 = m_3$	1	0	2	0	2
$I_4 = [2,3]$ $f(3) = 0 = M_3$ $f(4) = -4 = m_3$	1	-4	0	-4	0
				$L(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{4} h_i \bullet m_i = -2$	$U(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{4} h_i \bullet M_i = \frac{25}{4}$

لاحظ ما يلي :

(1) $L(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{4} h_i \bullet m_i = -2$

(2) $U(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{4} h_i \bullet M_i = \frac{25}{4}$

(3) $\int_0^4 \left(3x - x^2\right) dx \cong \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{-2 + \frac{25}{4}}{2} = \frac{17}{8}$

Q80. برهن أن :

$$(a)\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 2 \quad , \quad (b)\int_{-2}^{4}|3x-6|dx = 30$$

$$(a)\,L.H.S = \int_0^{27}\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int_0^{27} x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= 3\int_0^{27}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^{\frac{1}{2}}dx = 3\cdot\frac{2}{3}\left[\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{27}$$

$$= 2\left[\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}+1\right]^{\frac{3}{2}} - 2 = 2\left[3+1\right]^{\frac{3}{2}} - 2$$

$$= 2\left[2^2\right]^{\frac{3}{2}} - 2 = 16 - 2 = 14 = L.H.S$$

(b) العدد الحرج $3x-6=0 \Rightarrow x=2$

test by $3x-6$: -2 ، $-2<x<2$ ، 2 ، $4>x>2$ ، 4 ; $- - -$ ، $+ + +$

الكل يساوي مجموع الاجزاء ⇐

$$L.H.S = \int_{-2}^{4}|3x-6|dx = -\int_{-2}^{2}(3x-6)\,dx + \int_2^4(3x-6)\,dx$$

$$= -\left(\frac{3}{2}x^2-6x\right)_{-2}^{2} + \left(\frac{3}{2}x^2-6x\right)_2^4 = 30 = R.H.S$$

Q81. جد قيمة **a** إذا علمت أن :

$$\int_1^a\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx$$

$$solution: \int_1^a\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx$$

$$\overset{\times 2}{\Leftrightarrow}\int_1^a(2x+1)dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx$$

$$\Rightarrow\left[x^2+x\right]_1^a = 4\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow a^2+a-2 = 4(1-0) \Rightarrow a^2+a-6=0$$

$$\Rightarrow (a+3)(a-2)=0 \Rightarrow Either\ \ a=-3\ \ Or\ \ a=2$$

Q82. لتكن $f(x)=x^2+2x+k$ دالة نهايتها الصغرى المحلية تساوي **(- 5)** ، جد $\int_1^3 f(x)\,dx$

الحل : **- 5** = نهاية محلية صغرى محلية = إحداثي صادي فلنبحث عن **x** المناسبة لها

$$f'(x)=2x+2 \quad , \quad 0=2x+2 \Rightarrow x=-1$$

test by $f'(x)$: $x<-1$ ، -1 ، $x>-1$; $- - -$ ، $+ + +$; m

$\therefore (-1,-5)$ هي نقطة حرجة تحقق معادلة المنحني

$$f(x)=x^2+2x+k \Rightarrow -5 = 1-2+k \Rightarrow k=-4$$

$$\therefore f(x)=x^2+2x-4$$

$$\therefore \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3\left(x^2+2x-4\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3+x^2-4x\right)_1^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3+3x^2-12x\right)_1^3 = \frac{1}{3}(27+27-36+8) = \frac{26}{3}$$

Q82. إذا كان للمنحني $f(x)=(x-3)^3+1$ نقطة انقلاب هي (a,b) فجد القيمة العددية للمقدار:

$$\int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)\,dx$$

$$solution: f'(x)=3(x-3)^2 \Rightarrow f''(x)=6(x-3)$$

$$0=6(x-3) \Rightarrow x = \boxed{3=a}$$

$$f(3)=(3-3)^3+1 = \boxed{3=b}$$

$$\int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)\,dx = \int_0^1 f'(x)\,dx - \int_0^3 f''(x)\,dx$$

$$= \left[(x-3)^3\right]_0^1 - \left[3(x-3)^2\right]_0^3 = -8+27-(-27) = 46$$

Q83. $f(x)=\begin{cases}2x & \forall x\geq 3\\ 6 & \forall x<3\end{cases}$, compute $\int_1^4 f(x)\,dx$

الحل:الاستمرارية

$$\forall a\in[1,4] \Rightarrow (1)\ a=3,\ (2)\ a\in(3,4],\ (3)\ a\in[1,3)$$

$$(1)\ If\ \ a=3\ ,,,\ \ f(3)=2(3)=6\ \ defind$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}(2x) = 6 = L_1\\ \lim\limits_{x\to 3^-}(6) = 6 = L_2\end{cases}$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2 \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = 6\ \ exist$$

$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow f\ \ continuous\ at\ \ a=3$$

2. الدالة $f(x)=2x$ مستمرة على $(3,4]$ لأنها كثيرة الحدود

3. الدالة $f(x)=6$ مستمرة على $[1,3)$ لأنها كثيرة الحدود

من 1 , 2 , 3 نستنتج أن الدالة مستمرة.

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^3 6\,dx \oplus \int_3^4 2x\,dx = 6x\Big]_1^3 \oplus x^2\Big]_3^4$$

$$= 18-6 \oplus 16-9 = 19$$

$$(i)\int\left[f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^{n}\right]dx=\frac{1}{n+1}\left(f(x)\right)^{n+1}+C,\quad n\neq-1$$

$$(ii)\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left|f(x)\right|+C$$

$$(iii)\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+C$$

Q84. جد : $(a)\int_3^2\frac{x^3-1}{x-1}dx\ ,(b)\int_0^1\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2dx$

$$Solution:(a)\int_3^2\frac{x^3-1}{x-1}dx=\int_3^2\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\Big]_3^2=\frac{8}{3}+2+2-\left(9+\frac{9}{2}+3\right)=-\frac{59}{6}$$

$$(b)\int_0^1\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2dx=\int_0^1\sqrt{x}\left(4+4\sqrt{x}+x\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(4x^{\frac{1}{2}}+4x+x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\left[\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^2+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{8}{3}+2+\frac{2}{5}=\frac{76}{15}$$

Q85. Evaluate

$$(1)\int x^2\sin x^3dx=\frac{1}{3}\int 3x^2\sin x^3dx=-\frac{1}{3}\cos x^3+C$$

$$(2)\int\sin^2 3x\,dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 6x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C$$

$$(3)\int\sin^4 x\,dx=\int\left(\sin^2 x\right)^2dx=\int\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[x-\sin 2x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\right]+C=???$$

$$(4)\int\cot 5x\,dx=\int\frac{\cos 5x}{\sin 5x}dx=\frac{1}{5}\int\frac{\overbrace{5\cos 5x}^{f'(x)}}{\underbrace{\sin 5x}_{f(x)}}dx$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\sin 5x\right|+C$$

$$(5)\int\tan^2 3x\,dx=\int\left(\sec^2 3x-1\right)dx=\frac{1}{3}\tan 3x-x+C$$

$$(6)\int\tan^4 3x\,dx=\int\tan^2 3x\cdot\tan^2 3x\,dx$$

$$=\int\tan^2 3x\left(\sec^2 3x-1\right)dx$$

$$=\int\tan^2 3x\cdot\sec^2 3x\,dx-\int\tan^2 3x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\underbrace{\tan^2 3x}_{f(x)}\cdot\underbrace{3\sec^2 3x}_{f'(x)}dx-\int\left(\sec^2 3x-1\right)dx$$

$$=\frac{1}{9}\tan^3 3x-\frac{1}{3}\tan 3x+x+C$$

$$(7)\int\tan^3 3x\,dx=\int\tan 3x\cdot\tan^2 3x\,dx$$

$$=\int\tan 3x\left(\sec^2 3x-1\right)dx=$$

$$=\int\tan 3x\cdot\sec^2 3x\,dx-\int\tan 3x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\tan 3x\cdot 3\sec^2 3x\,dx-\int\frac{\sin 3x}{\cos 3x}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\underbrace{\tan 3x}_{f(x)}\cdot\underbrace{3\sec^2 3x}_{f'(x)}dx+\frac{1}{3}\int\frac{\overbrace{-3\sin 3x}^{g'(x)}}{\underbrace{\cos 3x}_{g(x)}}dx$$

$$=\frac{1}{6}\tan^2 3x+\frac{1}{3}\ln\left|\cos 3x\right|+C$$

$$(8)\int\csc^2 4x\,dx=-\frac{1}{4}\cot 4x+C$$

$$(9)\int\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx=\int\underbrace{\tan x}_{f(x)}\cdot\underbrace{\sec^2 x}_{f'(x)}dx=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$$

$$(10)\int\frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}dx=\int\frac{\sqrt{\cot 2x}}{\sin^2 2x}dx$$

$$=\int\sqrt{\cot 2x}\cdot\csc^2 2x\,dx=-\frac{1}{2}\int\underbrace{\cot^{\frac{1}{2}}2x}_{f(x)}\cdot\left(\underbrace{-2\csc^2 2x}_{f'(x)}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cot^{\frac{3}{2}}2x+C$$

$$(11)\int\csc^4 4x\,dx=\int\csc^2 4x\cdot\csc^2 4x\,dx$$

$$=\int\csc^2 4x\cdot\left(\cot^2 4x+1\right)dx$$

$$=\int\cot^2 4x\cdot\csc^2 4x\,dx+\int\csc^2 4x\,dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int\underbrace{\cot^2 4x}_{f(x)}\cdot\left(\underbrace{-4\csc^2 4x}_{f'(x)}\right)dx+\int\csc^2 4x\,dx$$

$$=-\frac{1}{12}\cot^3 4x-\frac{1}{4}\cot 4x+C$$

$$(13)\int\cos^2 3x\sin^2 3x\,dx$$

$$=\int\frac{1}{2}(1+\cos 6x)\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 6x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-\cos^2 6x\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(\sin^2 6x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2}(1-\cos 12x)\right)dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{12}\sin 12x\right)+C$$

$$(12)\int\csc^2 x\cos x\,dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}\cos x\,dx$$

$$=\int\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}dx=\int\cot x\csc x\,dx=-\csc x+C$$

$$(8)\int\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)dx=$$

$$\int\left(\underbrace{\cos^2 x-\sin^2 x}_{=\cos 2x}\right)\left(\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{=1}\right)dx$$

$$=\int \cos 2x\ dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

$$(9)\int(\sin 2x-1)(\cos^2 2x+2)\ dx=$$

$$\int \sin 2x\cos^2 2x\ dx+2\int \sin 2x\ dx$$

$$-\int \cos^2 2x\ dx-\int 2\ dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(\underbrace{-2\sin 2x}_{f'(x)}\right)\underbrace{\cos^2 2x}_{f(x)}\ dx+2\int \sin 2x\ dx$$

$$-\frac{1}{2}\int(1-\cos 4x)\ dx-\int 2\ dx$$

$$=-\frac{1}{6}\cos^3 2x-\cos 2x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)-2x+C$$

$$(10)\int\frac{\ln|x|}{x}dx=\int\underbrace{(\ln|x|)^1}_{f(x)}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{f'(x)}dx=\frac{1}{2}(\ln|x|)^2+C$$

$$(11)\int\frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx=2\cdot 3\int \sin\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{f(x)}\left(\underbrace{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}_{f'(x)}\right)dx$$

$$=-6\cos\sqrt[3]{x}+C$$

$$(12)\int \cot x\ \csc^3 x\,dx=-\int\underbrace{-\cot x\cdot\csc x}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\csc^2 x}_{f(x)}dx$$

$$=-\frac{1}{3}\csc^3 x+C$$

$$(13)\int \sin 6x\ \cos 3x\,dx=\int 2\sin 3x\cos 3x\cdot\cos 3x\,dx$$

$$=2\int\cos^2 3x\cdot\sin 3x\,dx=-\frac{2}{3}\int\underbrace{\cos^2 3x}_{f(x)}\cdot\left(\underbrace{-3\sin 3x}_{f'(x)}\right)dx$$

$$=-\frac{2}{9}\cos^3 3x+C$$

Q87. جد حل المعادلة التفاضلية

$$(1)\quad y'=\frac{\cos^2 y}{x}\ ,\quad y=\frac{\pi}{4}\ \ If\ \ x=1$$

$$Solt.\ \frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2 y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{\cos^2 y}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\int \sec^2 y\ dy=\int\frac{1}{x}\ dx\Rightarrow$$

$$\tan y=\ln x+C\Rightarrow$$

$$\tan\frac{\pi}{4}=\ln 1+C\Rightarrow C=1\quad\Rightarrow\boxed{\tan y=\ln x+1}$$

Q86. Evaluate

$$(1)\int\sin^3 x\ dx=\int\sin x\cdot\sin^2 x\ dx$$

$$=\int\sin x\cdot(1-\cos^2 x)\,dx$$

$$=\int\sin x\ dx+\int\underbrace{\cos^2 x}_{(f(x))^2}\left(\underbrace{-\sin x}_{f'(x)}\right)dx$$

$$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

$$(2)\int\frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx=\int\frac{\cos x\cdot\cos^2 x}{1-\sin x}dx$$

$$=\int\frac{\cos x\cdot(1-\sin^2 x)}{1-\sin x}dx$$

$$=\int\frac{\cos x\cdot\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)}{\cancel{1-\sin x}}dx$$

$$=\int\left(\underbrace{1+\sin x}_{f(x)}\right)^1\left(\underbrace{\cos x}_{f'(x)}\right)dx=\frac{1}{2}(1+\sin x)^2+C$$

$$(3)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sin^{-\frac{1}{2}}x}_{(f(x))^{-1/2}}\cdot\underbrace{\cos x}_{f'(x)}dx$$

$$=2(\sin x)^{\frac{1}{2}}\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2-\sqrt{2}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\overbrace{\sec^2 x}^{f'(x)}}{\underbrace{2+\tan x}_{f(x)}}dx=\ln|2+\tan x|\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\ln 3$$

$$(4)\int_0^{\ln 2}e^{-x}\ dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 2}=-\left[e^{-\ln 2}-1\right]$$

$$=-\left[e^{\ln\frac{1}{2}}-1\right]=-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}$$

$$(5)\int_{\ln 3}^{\ln 5}e^{2x}\ dx=\frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{\ln 3}^{\ln 5}=\frac{1}{2}\left[e^{2\ln 5}-e^{2\ln 3}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{\ln 25}-e^{\ln 9}\right]=\frac{1}{2}(25-9)=8$$

$$(6)\int\frac{1}{x^2-14x+49}\ dx=\int\frac{1}{(x-7)^2}\ dx$$

$$=\int(x-7)^{-2}\ dx=-(x-7)^{-1}+C=\frac{-1}{x-7}+C$$

$$(7)\int\sec^2 3x\cdot e^{\tan 3x}\ dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\underbrace{3\sec^2 3x}_{f'(x)}\cdot e^{\overbrace{\tan 3x}^{f(x)}}dx=\frac{1}{3}e^{\tan 3x}+C$$

$$\overset{x=1,\,y=2}{\Rightarrow}\quad 0=-\frac{1}{2}+C_1\Rightarrow C_1=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$Ln|3-y|=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\Rightarrow 3-y=e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y=3-e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot e^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y=3-C\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

(5). $xy\dfrac{dy}{dx}+y^2=1-y^2$

$$Solution: xy\frac{dy}{dx}+y^2=1-y^2\Rightarrow$$

$$xy\frac{dy}{dx}=1-2y^2\Rightarrow\frac{Y}{1-2y^2}\,dy=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\int\frac{Y}{1-2y^2}\,dy=\int\frac{dx}{x}\overset{\times\left(\frac{4}{-1}\right)}{\Rightarrow}$$

$$\int\underbrace{\frac{\overbrace{4y}^{f'(x)}}{1-2y^2}}_{f(x)}dy=-4\int\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$Ln|2y^2-1|=-4Ln|x|+LnC_1$$

$$Ln|2y^2-1|+Ln|x^4|=LnC_1\Rightarrow$$

$$Ln|x^4(2y^2-1)|=LnC_1$$

$$\Rightarrow\boxed{2x^4y^2-x^4=C}\qquad[\pm C_1=C]$$

(6) $\sin x\,\cos y\dfrac{dy}{dx}+\cos x\,\sin y=0$

$$\Rightarrow\sin x\,\cos y\frac{dy}{dx}=-\cos x\,\sin y$$

$$\Rightarrow\frac{\cos y}{\sin y}dy=-\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$\Rightarrow\int\frac{\cos y}{\sin y}dy=-\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$\Rightarrow Ln|\sin y|=-Ln|\sin x|+LnC_1$$

$$\Rightarrow Ln|\sin y|+Ln|\sin x|=LnC_1$$

$$\Rightarrow Ln|\sin y\cdot\sin x|=LnC_1$$

$$\Rightarrow\sin y\cdot\sin x=C\qquad(\pm C_1=C)$$

(7): $\dfrac{dy}{dx}=\cos^2x\cos^2y\Leftrightarrow$

$$\frac{dy}{\cos^2y}=\cos^2x\;dx\Rightarrow$$

$$\int\sec^2y\;dy=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx$$

$$\Rightarrow\tan y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-2x\tan y\quad,\quad y=\dfrac{\pi}{2}\;If\;x=0$

$$Solt.\;\frac{dy}{dx}=-2x\tan y\Rightarrow\frac{dy}{\tan y}=-2xdx$$

$$\Rightarrow\int\frac{\cos y}{\sin y}dy=\int-2x\;dx\Rightarrow$$

$$ln(\sin y)=-x^2+C,$$

$$Condition\quad ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)=0+C\Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow ln(\sin y)=-x^2\Rightarrow\sin y=e^{-x^2}$$

(2) $(x^2+3y^2)dx-2xydy=0$

$$Solt.\;\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}\qquad\div\frac{x^2}{x^2}\quad,\quad x\neq 0$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}=f\left(\frac{y}{x}\right)\quad The\;equation\;is\;Hemogenuous$$

$$Let\quad\frac{y}{x}=u\Rightarrow y=u\cdot x\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+3u^2}{2u}$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1+3u^2}{2u}-u\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1+3u^2-2u^2}{2u}$$

$$\Rightarrow\frac{2u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{2u}{1+u^2}du=\int\frac{1}{x}\;dx$$

$$\Rightarrow ln|1+u^2|=ln|x|+lnC\Rightarrow$$

$$ln|1+u^2|=ln|Cx|\Rightarrow\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=Cx$$

$$\Rightarrow\boxed{x^2+y^2=Cx^3}$$

(3) $\dfrac{dy}{dx}\cos^3x=\sin x$

$$Solution:\quad\frac{dy}{dx}=\sin x\cos^{-3}x\Rightarrow$$

$$dy=\sin x\cos^{-3}x\;dx\Rightarrow$$

$$\int dy=-\int\cos^{-3}x(-\sin x)\,dx\Rightarrow$$

$$y=-\frac{\cos^{-2}x}{-2}+C\Rightarrow\quad y=\frac{1}{2}\sec^2x+C$$

(4). $\dfrac{dy}{dx}+xy=3x\qquad,\quad x=1\;,\;y=2$

$$Solution:\;\frac{dy}{dx}=3x-xy\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x(3-y)$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{3-y}=xdx\Rightarrow\int\frac{dy}{3-y}=\int x\;dx\overset{\times(-1)}{\Rightarrow}$$

$$\int\frac{-1\;dy}{3-y}=-\int xdx\Rightarrow Ln|3-y|=-\frac{1}{2}x^2+C_1$$

(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{y-x}$, $\div\frac{x}{x}$, $x\neq 0$, $x\neq y$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)+1}{\left(\frac{y}{x}\right)-1} \quad \ldots(1)=f\left(\frac{y}{x}\right)\Rightarrow$$

المعادلة متجانسة

Let $\frac{y}{x}=u \quad \ldots(2)$

$$\Rightarrow y=\underbrace{u}_{i}\bullet\underbrace{x}_{ii}\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}}\ldots(3)$$

تعوض (3) , (2) في المعادلة (1) $\Leftarrow$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u+1}{u-1}\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{u+1}{u-1}-u\Rightarrow$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u+1-u(u-1)}{u-1}\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{-u^2+2u+1}{u-1}$$

$$\Rightarrow \frac{u-1}{-u^2+2u+1}\bullet du=\frac{1}{x}\bullet dx \xrightarrow{\otimes\frac{2}{-1}}$$

$$\Rightarrow \int\frac{2u-2}{u^2-2u-1}\bullet du=-2\int\frac{1}{x}\bullet dx$$

$$\Rightarrow \ln\left|u^2-2u-1\right|=-2\ln|x|+\ln C_1$$

$$\Rightarrow \ln\left|u^2-2u-1\right|+\ln x^2=\ln C_1$$

$$\Rightarrow \ln\left(\left|u^2-2u-1\right|\bullet x^2\right)=\ln C_1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y^2}{x^2}-2\bullet\frac{y}{x}-1\right)\bullet x^2=\boxed{\pm C_1}$$

$$\Rightarrow y^2-2xy-x^2=\boxed{C}$$

Q88. جد المساحة بين منحني الدوال التالية ومحور السينات

(1) $f(x)=x^2-x-2 \quad on\ [-3,0]$

نجد التقاطع مع محور السينات بالتعويض $(y=f(x)=0)$

$$0=x^2-x-2 \quad \Rightarrow (x-2)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x=2}_{rejected}\notin[-3,0]\ or\ \ x=-1\in[-3,0]$$

$$A=\left|\int_{-3}^{-1}(x^2-x-2)\,dx\right|+\left|\int_{-1}^{0}(x^2-x-2)\,dx\right|$$

$$=\left|\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_{-3}^{-1}\right|+\left|\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_{-1}^{0}\right|$$

$$=\left|-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\left(-9-\frac{9}{2}+6\right)\right|+\left|0-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)\right|$$

Complete the solution please

(2) $f(x)=3x-x^3$

Solution. $0=x(3-x^2)\Rightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$

$$A=\left|\int_{-\sqrt{3}}^{0}(3x-x^3)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{\sqrt{3}}(3x-x^3)\,dx\right|$$

$$=\left|\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\Big]_{-\sqrt{3}}^{0}\right|+\left|\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\Big]_{0}^{\sqrt{3}}\right|$$

$$=\left|0-\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\right)\right|+\left|\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\right)-0\right|=\frac{9}{2}\,square\ units$$

(3) $f(x)=\frac{2}{x} \quad , \quad 1\le x\le 4$

Solution. $f(x)=\frac{2}{x}>0$

$$A=\int_2^4\frac{2}{x}dx=2\ln x\Big]_2^4=2(\ln 4-\ln 2)$$

$$=2\ln\frac{4}{2}=2\ln 2\ square\ unit$$

(4) $f(x)=\sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$

Solution. $\underbrace{\sin x}_{y=0}=0$

$$\underbrace{\sin^2 x}_{=0}+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos x=\pm 1\Rightarrow$$

Either $(1,0)\Rightarrow \boxed{x=0}$ or $(-1,0)\Rightarrow x=\pi$

$$A=\left|\int_{-\pi/2}^{0}(\sin x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{\pi}(\sin x)\,dx\right|$$

$$=\left|-\cos x\Big]_{-\pi/2}^{0}\right|+\left|-\cos x\Big]_{0}^{\pi}\right|$$

$$=|-1-(0)|+|(1)+1|=3\,square\ units$$

(5) $f(x)=\cos x \quad , \quad [-\pi,\pi]$

Solution. $\underbrace{\cos x}_{x=0}=0$

$$\sin^2 x+\underbrace{\cos^2 x}_{=0}=1\Rightarrow \sin x=\pm 1\Rightarrow$$

Either $(0,1)\Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2}}$ or $(0,-1)\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}$

تكملة (5)

من الممكن الاستغناء عن القيمه المطلقه فمن خط اعداد الدالة المنطقة الأولى لليسار تقع تحت محور السينات وكذلك المنطقة الثالثة، أما المنطقة الثانية فهي فوق محور السينات. فالمساحة يمكن أن تكتب بالشكل التالي

$$A=\int_{-\pi}^{-\pi/2}(-\cos x)\,dx+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(+\cos x)\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos x)\,dx$$

$$Or=\left|\int_{-\pi}^{-\pi/2}(\cos x)\,dx\right|+\left|\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)\,dx\right]_0^{\pi}+\left|\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos x)\,dx\right]_0^{\pi}\Bigg|$$

$$=\left|\sin x\right]_{-\pi}^{-\pi/2}\Big|+\left|\sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big|+\left|\sin x\right]_{\pi/2}^{\pi}\Big|$$

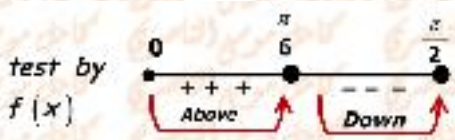
$$=|-1-0|+|1+1|+|0-1|=3\,square\ units$$

(5) $y=\cos 3x\quad,\quad\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$Solution.\ \underbrace{\cos 3x}_{x=0}=\underbrace{0}_{(0,\pm1)}$$

$$Either\ (0,1)\Rightarrow 3x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\boxed{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$or\ (0,-1)\Rightarrow 3x=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$



$$A=\left|\int_0^{\pi/6}(\cos 3x)\,dx\right|+\left|\int_{\pi/6}^{\pi/2}(\cos 3x)\,dx\right|$$

$$=\frac{1}{3}\left|\sin 3x\right]_0^{\pi/6}\Big|+\frac{1}{3}\left|\sin 3x\right]_{\pi/6}^{\pi/2}\Big|$$

$$=\frac{1}{3}|1-0|+\frac{1}{3}|-1-1|=1\ square\ unit$$

Q88. جد المساحة بين المنحنيين لكل مما يلي:

(1) $y=x\quad,\quad y=\sqrt{x}$

$$Sol.\ y_1=y_2\Rightarrow x=\sqrt{x}\xrightarrow{(\ )^2}x^2=x$$

$$\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$

$$A=\left|\int_0^1\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)dx\right|=\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{6}\ sq\ unit$$

(2) $y=x^2\quad,\quad y=x^4-12$

$$Sol.\ y_2=y_1\Rightarrow x^4-12=x^2\Rightarrow$$

$$x^4-x^2-12\Rightarrow(x^2-4)(x^2\oplus 3)=0\Rightarrow x=\pm2$$

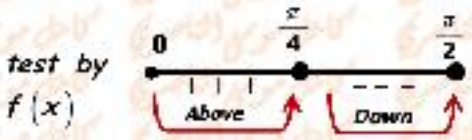
$$A=\left|\int_{-2}^{2}\left(x^4-x^2-12\right)dx\right|=\left|\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3-12x\right]_{-2}^{2}\Bigg|$$

$$\left|\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-24-\left(-\frac{32}{5}+\frac{8}{3}+24\right)\right|=??\ sq\ units$$

(3) $y=\cos x, y=\sin x\quad,\ on\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$Sol.\ y_1=y_2\Rightarrow\cos x=\sin x$$

$$\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=1\ ,\cos x\neq0\Rightarrow\tan x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$$



$$A=\left|\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)\,dx\right|+\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos x-\sin x)\,dx$$

$$=\left|\sin x+\cos x\right]_0^{\pi/4}\Big|+\left|\sin x+\cos x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\Big|$$

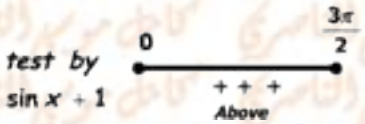
$$=\left|\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}-(0-1)\right|+\left|1+0-\left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\right)\right|$$

$$=\left|\sqrt2+1\right|+\left|1-\sqrt2\right|=\sqrt2+1+\sqrt2-1=2\sqrt2\ square\ unit$$

(3) $y=2\sin x+1\ ,y=\sin x\quad,\ on\ [0,2\pi]$

$$Sol.\ y_1=y_2\Rightarrow 2\sin x+1=\sin x\Rightarrow\boxed{\sin x+1}=0$$

$$\Rightarrow\sin x=\underbrace{-1}_{(0,-1)}\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$$



$$A=\left|\int_0^{\pi}\left(\underbrace{\sin x}_{f(x)}\underbrace{\cos x}_{f'(x)}-\sin x\right)dx\right|+\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x\cos x-\sin x)\,dx$$

$$=\left|\frac{1}{2}\sin^2 x+\cos x\right]_0^{\pi}\Big|+\left|\frac{1}{2}\sin^2 x+\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\Big|$$

$$=|0-1-(0+1)|+|0-1-(0+1)|=4\ \ square\ unit$$

Q89. جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة تساوي $V(t)=2t-4\ m/sec$ ، جد

a. المسافة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

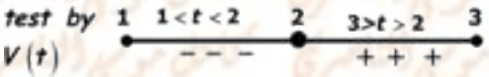
b. الازاحة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

c. المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

d. بعده بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة

الحل : a.

$$0=2t-4\Rightarrow t=2\ sec$$



$$d=\left|\int_1^2(2t-4)\,dt\right|+\left|\int_2^3(2t-4)\,dt\right|$$
$$=\left|t^2-4t\right]_1^2\right|+\left|t^2-4t\right]_2^3\right|$$
$$=\left|4-8-(1-4)\right|+\left|9-12-(4-8)\right|=2\ m$$

b. $s=\int_1^3(2t-4)\,dt=t^2-4t\Big]_1^3=\ldots=0$

c. $d=\left|\int_4^5(2t-4)\,dt\right|=\left|t^2-4t\Big]_4^5\right|=\ldots=5\ m$

d. $s=\int_0^4(2t-4)\,dt=t^2-4t\Big]_0^4=\ldots=0$

Q90 . يتحرك جسم على خط مستقيم بتعجيل منتظم يساوي $18\ m/sec^2$ وفي نهاية الثانية الرابعة على البدء تصبح سرعته $82\ m/sec$، جد :

a. المسافة المقطوعة خلال الثانية الثالثة

b. بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني

الحل:

$$v=\int a(t)\,dt\Rightarrow v=\int 18\,dt$$
$$\Rightarrow v=18t+c\quad (v=82\ when\ t=4)$$
$$\Rightarrow 82=18(4)+c\Rightarrow c=10$$
$$\therefore\quad v=18t+10\Rightarrow v>0$$
$$\Rightarrow d=\int_2^3(18t+10)\,dt=9t^2+10t\Big]_2^3=55\ m$$

b. $S=\int_0^3(18t+10)\,dt=9t^2+10t\Big]_0^3=111\ m$

١. حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحني $y=f(x)$ دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بالمستقيمين $x=a\,,\,x=b$ يساوي V

$$V=\pi\int_a^b y^2dx\quad cubic\ units$$

٢. حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحني $x=f(y)$ دورة كاملة حول محور الصادات والمحددة بالمستقيمين $y=a\,,\,y=b$ يساوي V

$$V=\pi\int_a^b x^2dy\quad cubic\ units$$

اذا لم تعطَ الفترة وكان الدوران

١. حول محور $\overleftrightarrow{X}$ (نجد تقاطع الدالة مع محور السينات)

٢. حول محور $\overleftrightarrow{Y}$ (نجد تقاطع الدالة مع محور الصادات)

Q91. المنطقة المحددة بالمنحني $x=\frac{1}{\sqrt{y}}$ والمحددة بالفترة $1\le y\le 4$ دارت دورة كاملة حول محور $\overleftrightarrow{Y}$ ، جد حجمها

الحل:

$$V=\pi\int_a^b x^2dy$$
$$x=\frac{1}{\sqrt{y}}\Rightarrow \boxed{x^2=\frac{1}{y}}$$
$$\therefore V=\pi\int_1^4\frac{1}{y}\,dy=\pi(\ln y)\Big]_1^4=\pi\ln 4\ ut^3$$

Q92 . المنطقة المحددة بالمنحني $y=4x^2$ والمحددة بالمستقيمين $y=0\,,\,y=16$ دارت دورة كاملة حول محور $\overleftrightarrow{Y}$ ، جد حجمها

الحل:

$$V=\pi\int_a^b x^2dy$$
$$y=4x^2\Rightarrow \boxed{x^2=\frac{1}{4}y}$$
$$\therefore V=\pi\int_0^{16}\frac{1}{4}y\,dy=\frac{\pi}{8}y^2\Big]_0^{16}=32\pi\quad ut^3$$

Q93. المنطقة المحددة بالمنحني $y=\frac{1}{x}$ وبالمستقيمين $y=1\,,\,y=2$ دارت دورة كاملة حول محور $\overleftrightarrow{Y}$ ، جد حجمها

الحل:

$$V=\pi\int_a^b x^2dy$$
$$y=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{y}\Rightarrow \boxed{x^2=\frac{1}{y^2}}$$
$$\therefore V=\pi\int_1^2\frac{1}{y^2}dy=\pi\int_1^2 y^{-2}\,dy=-\pi y^{-1}\Big]_1^2$$
$$=-\pi\left(\frac{1}{y}\right)\Big]_1^2=\frac{1}{2}\pi\quad ut^3$$

Q94. المنطقة المحددة بالمنحني $x^2=y^3$ وبالمستقيمين $x=0\,,\,x=8$ دارت دورة كاملة حول محور $\overleftrightarrow{X}$ ، جد حجمها

الحل:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx$$
$$x^2=y^3\Rightarrow y=x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow \boxed{y^2=x^{\frac{4}{3}}}$$
$$\therefore V=\pi\int_0^8 x^{\frac{4}{3}}dy=\frac{3\pi}{7}x^{\frac{7}{3}}\Big]_1^8$$
$$=\frac{3\pi}{7}\left(2^3\right)^{\frac{7}{3}}\Big]_1^2=\frac{384}{7}\pi\quad ut^3$$

الفصل السادس : الحد الأدنى من المادة:

المبرهنات	مبرهنة 7 ونتيجتها ومبرهنة 8
الأمثلة	2,3,5
تمارين 6-1	4,5,6
تمارين 6-2	4,6
تمارين 6-3	1,3,4