مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية

الفصل السادس
الهندسة الفضائيةSpace Geometry

الرياضيات
للسادس العلمي

(تعاريف و حقائق ومبرهنات في الهندسة)

- مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠
- مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠
- إذا قطع مستقيم مستقيمان متوازيان فأن :- أ) كل زاويتين(متبادلتين أو متناظرتين) متطابقتان ب) كل زاويتين داخليتين وفي جهة واحدة من القاطع مجموع قياسهم ١٨٠ (متكاملتان)
- كل زاويتان متقابلتان بالرأس متساويتان بالقياس
- متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين
- كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان
- كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متساويان في الطول
- قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهم القطر الآخر
- مجموع قياسي أي زاويتين متتاليتين في متوازي الأضلاع = ١٨٠
- المعين هو متوازي أضلاع فيه(ضلعان متجاوران متساويان في الطول أو قطراه متعامدان)
- المستطيل هو متوازي أضلاع (إحدى زواياه قائمة أو قطراه متساويان بالطول)
- المربع هو متوازي أضلاع (إحدى زواياه قائمة وفيه ضلعان متجاوران متساويان بالطول أو قطراه متعامدان ومتطابقان)
- قياس الزاوية الخارجية من مثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين غير المجاورة .
- وتر المثلث القائم: هو اكبر ضلع في المثلث مقابل للزاوية القائمة
- وتر الدائرة : هو قطعة مستقيمة تصل بين أي نقطتين من نقط الدائرة.
- منصف زاوية الرأس في المثلث المتطابق الضلعين عمودي على القاعدة وينصفها
- زاويتا قاعدة المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان.
- المثلث المتطابق الضلعين متناظر حول منصف زاوية الرأس (أو العمود النازل من الرأس على القاعدة)
- اذا تطابقت زاويتان في مثلث تطابق الضلعان المقابلان لهما
- يتطابق المثلثان إذا ساوت أطوال الأضلاع الثلاثة في احدهما أطوال نظائرها الثلاثة في المثلث الآخر
- يتطابق المثلثان إذا ساوى في احدهما قياسا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما نظائرهما في الآخر
- يتطابق المثلثان إذا ساوى في احدهما قياسا زاويتين وضلع مناظر نظائرها في الآخر
- يتطابق ا لمثلثان قائما الزاوية إذا ساوى في احدهما طول وتر وطول ضلع قائم مع طولي نظيريهما من الآخر
- القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها نصف طوله.
- المستقيم المار بمنتصف احد أضلاع مثلث ويكون موازيا" ضلعا آخر ينصف الضلع الثالث .
- طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية إلى منتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر
- الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها تتلاقى في نقطة واحدة متساوية المسافة عن رؤوس المثلث

مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية

- منصفات زوايا المثلث تتلاقى في نقطة واحدة تكون متساوية الأبعاد عن أضلاع المثلث
- ارتفاع المثلث : هو بعد رأس المثلث عن الضلع المقابل لذلك الرأس.
- ارتفاعات المثلث تتلاقى في نقطة واحدة.
- القطعة المستقيمة المتوسطة : هي القطعة المستقيمة المحددة برأس المثلث ونقطة منتصف الضلع
المقابل لذلك الرأس .
- القطع المتوسطة تتلاقى في نقطة واحدة تقسم كل منها بنسبة ٢:١ من جهة الرأس .
- كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس قوسها
- مجموع قياسي الزاويتين في أي شكل رباعي دائري =١٨٠
- قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف الدائرة تساوي ٩٠ (قائمة)
- إذا تطابق قوسان في دائرة فان زاويتيهما المركزيتين متطابقتان
- إذا تطابق قوسان في دائرة فان زاويتيهما المحيطيتين متطابقتان
- القطر العمودي على وترفي دائرة ينصف الوتر وينصف كلا" من قوسيه .
- العمود النازل من مركز الدائرة على وتر فيها ينصفه
- قطر الدائرة المار بمنتصف وتر يكون عموديا" على هذا الوتر.
- الزاوية المماسية: هي الزاوية المحددة بمماس الدائرة ووترها المرسوم من نقطة التماس.
- المماس عمود على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.
- لايمكن رسم أكثر من مماس واحد لدائرة من نقطة تنتمي اليه .
- المستقيم العمودي على مماس دائرة من نقطة التماس يمر بمركز الدائرة.
- المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته المنتمية الى الدائرة يكون مماسا" للدائرة .
- نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث تكون مركزا" للدائرة التي تمس أضلاع المثلث من الداخل .
- المماسان المرسومان لدائرة من نقطة خارجة عنها متطابقان
- إذا رسم لدائرة من نقطة خارجة عنها مماسان فأنهما يقابلان زاويتين مركزيتين متساويتين بالقياس.
- إذا رسم لدائرة من نقطة خارجة عنها مماسان فأن قطعة المستقيم الواصلة بين مركز الدائرة والنقطة الخارجية تنصف الزاوية التي ضلعاها المماسان
- إذا رسم لدائرة من نقطة خارجة عنها مماسان فأن قطعة المستقيم الواصلة بين مركز الدائرة والنقطة الخارجية عمودية ومنصفة للوتر الذي نهايتاه نقطتي التماس.
- قياس الزاوية المحصورة بين المماس لدائرة والوتر المار بنقطة التماس يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على ذلك الوتر من الجهة الأخرى .
- إذا حدد مستقيم على ضلعي مثلث قطعا مستقيمة متناسبة الأطوال فهو يوازي الضلع الثالث.
- المستقيمات المتوازية تحدد على قاطعين لها قطعا متناسبة الأطوال.

- يتشابه مضلعان إذا تساوت قياسات زواياهما المتناظرة وتناسبتا أطوال إضلاعهما المتناظرة كذالك
- اذا رسم مستقيم يوازي ضلعا" في مثلث ويقطع ضلعيه الآخرين فأن المثلث الناتج مشابها للمثلث الأصلي
- يتشابه مثلثان إذا تساوت قياسات زواياهما.

مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية

- يتشابه مثلثان إذا طابقت زاويتان في احدهما زاويتان في الآخر.
- يتشابه مثلثان إذا تناسبت أطوال أضلاعهما
- يتشابه مثلثان إذا تطابقت زاوية من مثلث نظيرتها في مثلث آخر وكانا طولا الضلعين المحيطين بها متناسبين مع طولي الضلعين المحيطين بنظيرتها .
- مبرهنة فيثاغورث: (مجموع مربعي طولي الضلعين القائمين في المثلث القائم الزاوية يساوي مربع طول وتره)
- يكون المثلث قائما" اذا كان مربع طول احد أضلاعه مساويا لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين

التالي مهم جدا" للسادس العلمي

- لكل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يوجد مستو وحيد يحويهما.
- لكل مستقيم ونقطة لاتنتمي اليه يوجد مستو وحيد يحويهما
- لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستو وحيد يحويهما
- لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستو وحيد يحويهما
- يمكن رسم مستقيم وحيد عمود على مستو معلوم من نقطة معلومة
- في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة
- العلاقة بين المستقيمات في الفراغ (أما التوازي أو التقاطع أو التخالف)
- العلاقة بين المستقيمات والمستويات في الفراغ (إما التوازي او التقاطع بنقطةٍ)
- العلاقة بين المستويات (أما التوازي او التقاطع بمستقيم)
- إذا توازى مستقيمان فالمستوي المار بأحدهما ونقطة من الآخر فانه يحويهما) .
- المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر.
- إذا توازي مستويان فالمستقيم المحتوى في أحدهما يوازي الآخر
- اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوت قياسهما او تكاملتا وتوازى مستويهما.
- إذا قطع مستويان متوازيان بمستو ثالث فأن مستقيمي التقاطع متوازيان.
- يتساوى طولا قطعتي المستقيمين المتوازيين المحددتين بمستويين متوازيين.
- المستقيم الذي يقطع احد مستويين متوازيين يقطع الآخر .
- إذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما يوازي الآخر
- المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث (في الفراغ) متوازيان.
- مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في احدهما ويوازي الآخر .
- اذا وازى مستقيم مستويا" معلوما فالمستقيم المرسوم من اية نقطة من نقط المستوي موازيا للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوي
- اذا قطعت ثلاثة مستويات متوازية بمستقيمين فأن أطوال القطع المستقيمة المحددة بها تكون متناسبة .
- اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستويا" معلوما فأن مستويهما يوازي المستوي المعلوم.
- اذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث اخر واختلف الضلعان الاخران فاصغرهما يقابل اصغر الزاويتين

- اذا علم مستو ونقطة لاتنتمي اليه فيوجد مستوي وحيد يحوي تلك النقطة ويوازي المستوي المعلوم.
- المستويان الموازيان لمستو ثالث متوازيان.

- المستوي الذي يقطع أحد مستويين متوازيين يقطع الآخر ايضا"
- المستقيم مائلا" على مستو اذا كان قاطعا له وغير عمودي عليه
- المستقيم العمودي على مستو يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومه من اثره ضمن ذلك المستوي .
- لاثبات مستقيم عموديا" على مستوي فيجب ان يكون عمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما .
- جميع الأعمدة المرسومة على مستقيم من نقطة منتمية اليه يحتويها المستوي العمود على المستقيم من تلك النقطة.
- من نقطة معلومة يمكن رسم مستوي واحد فقط عمودي على مستقيم معلوم ولايمكن رسم سواه.
- المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عموديا على الآخر.
- المستويان العموديان على مستقيم واحد متوازيان.
- المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عموديا" على الآخر .
- مبرهنة الأعمدة الثلاثة (إذا رسم من نقطة في مستو مستقيمان احدهما عمودي على المستوي والآخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي فالمستقيم الواصل بين أية نقطة من نقط المستقيم العمودي على المستوي ونقطة تلاقي المستقيمين يكون عمودي على المستقيم المعلوم في المستوي.
- نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة (إذا رسم من نقطة لاتنتمي الى مستو معلوم مستقيمان احدهما عمودي على المستوي والآخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي فالمستقيم الواصل بين أثري العمودين يكون عموديا" على المستقيم المعلوم في المستوي .

مسلم الخزاعي / ع. النجف المركزية

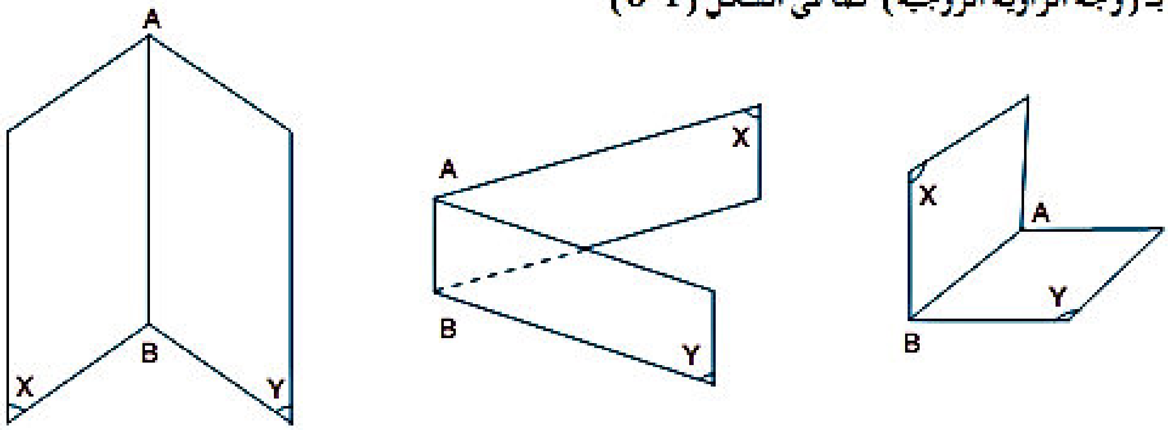
http://alnasiry.net/forums/forumdisplay.php?f=231

[6-2] الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة.

تعـــريـف [6-1]

الزاوية الزوجية : اتحاد نصفي مستويين لهما حافة (Edge) مشتركة.

تسمي الحافة المشتركة بـ(حرف الزاوية الزوجية Edge of Dihedral) ويسمى كل من نصفي المستويين بـ (وجه الزاوية الزوجية) كما في الشكل (6-1)



الشكل (6-1)

حيث $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية ، (X) و (Y) هما وجهاها

ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير : $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية ان لم يكن مشتركاً مع زاوية اخرى.

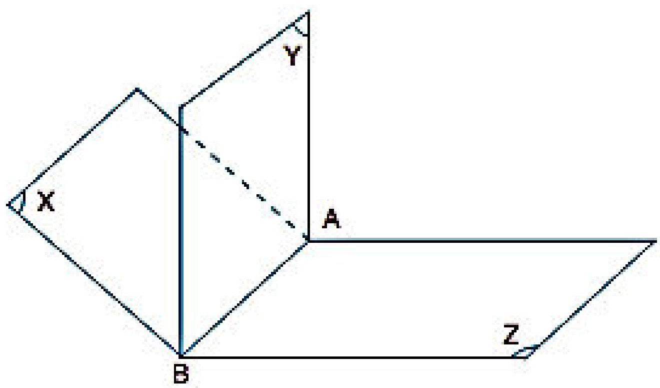
مثلاً :

الزاوية الزوجية

$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Z)$

$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

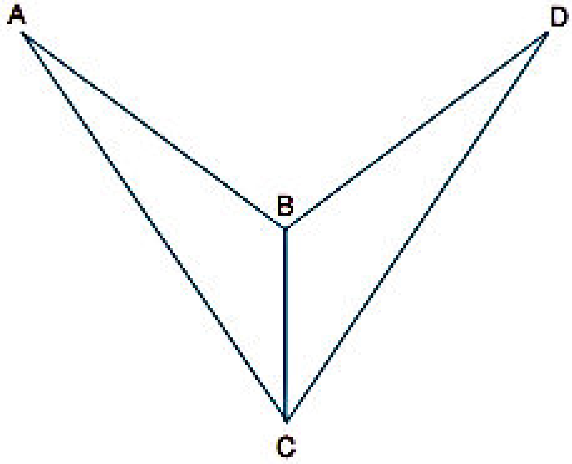
$(Y) - \overleftrightarrow{AB} - (Z)$



الشكل (6-2)

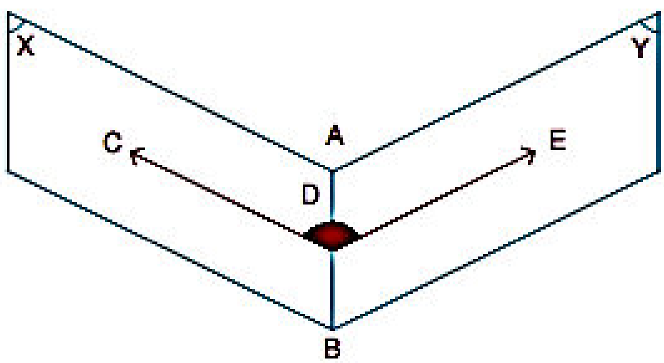
ولا يمكن ان تكتب الزاوية الزوجية بشكل $\overleftrightarrow{AB}$ في هذا المثال لأن الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ مشترك في اكثر من زاوية زوجية.

ملاحظة عندما تكون اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد، نكتب الزاوية الزوجية $A - \overleftrightarrow{BC} - D$ او الزاوية الزوجية بين المستويين (ABC) , (DBC) . كما في الشكل (6-3)



الشكل (6-3)

وتقاس الزاوية الزوجية كالآتي: نأخذ نقطة D على الحافة المشتركة $\overleftrightarrow{AB}$ ونرسم من D العمود $\overrightarrow{DC}$ في (X) والعمود $\overrightarrow{DE}$ في (Y) على الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ فيكون قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو قياس الزاوية CDE وتسمى الزاوية CDE الزاوية العائدة للزاوية الزوجية. (كما في الشكل (6-4))



الشكل (6-4)

بعبارة اخرى لدينا الزاوية الزوجية

$$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$$

ولدينا

$$\overrightarrow{DC} \subset (X), \overrightarrow{DE} \subset (Y)$$

$$\overrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$$

$\therefore \measuredangle CDE$ هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$ او $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

تعريف [6-2]

الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية : هي الزاوية التي ضلعاها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية

أو هي اتحاد شعاعين عمودين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في احد وجهي الزاوية الزوجية

ومن تعريف الزاويتين العائدة والزوجية يمكن استنتاج الآتي

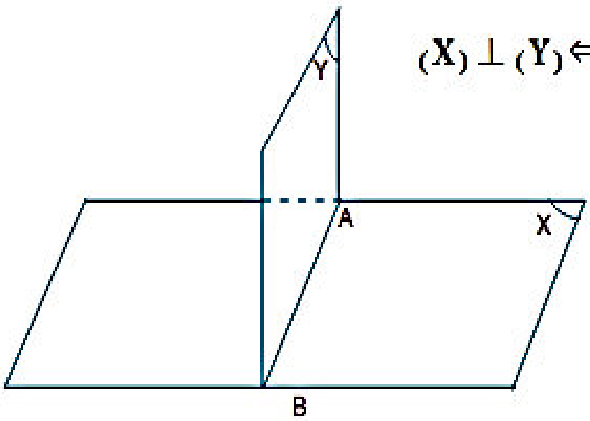
1) قياس زاوية عائدة لزاوية زوجية ثابت

2) قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس.

تعريف [6-3]

اذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فان المستويين متعامدان وبالعكس

$$(X) \perp (Y) \Leftrightarrow (X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y) = 90^\circ \text{ قياس}$$

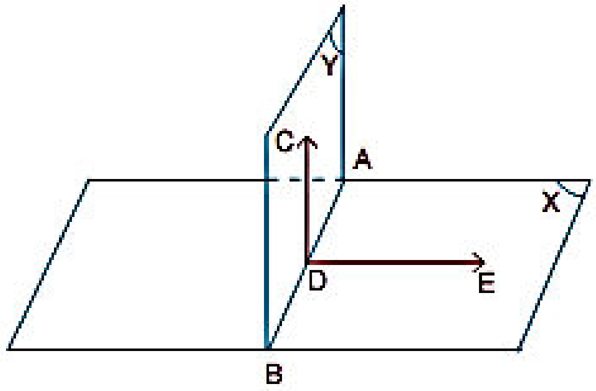


الشكل (6-5)

مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية

مبرهنة (7):

اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر



اي انه:

اذا كان $(X) \perp (Y)$

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

في D

فان $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المعطيات:

$(X) \perp (Y)$, $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في نقطة D

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان:

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore \sphericalangle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{AB} - (X)$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore m\sphericalangle CDE = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين 90° فان المستقيمين متعامدان وبالعكس)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

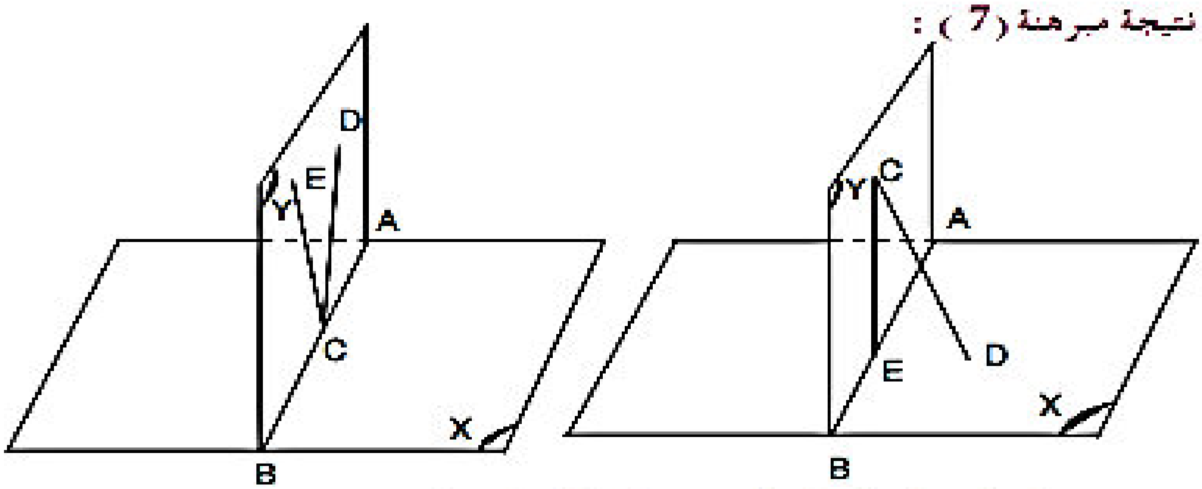
و . هـ . م

مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية

نتيجة مبرهنة (7):

اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوى فيه.

نتيجة مبرهنة (7) :



المعطيات : $\overline{CD} \perp (X), C \in (Y), (Y) \perp (X)$

المطلوب : $\overline{CD} \subset (Y)$.

البرهان : ليكن $(X) \cap (Y) = \overline{AB}$

(اذا تقاطع مستويان فأن مجموعة التقاطع مستقيم)

نرسم $\overline{CE} \subset (Y)$ بحيث $\overline{CE} \perp \overline{AB}$

(في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because (Y) \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overline{CE} \perp (X)$ (مبرهنة 7)

$\overline{CD} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overline{CE} = \overline{CD}$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمود على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\therefore \overline{CD} \subset (Y)$

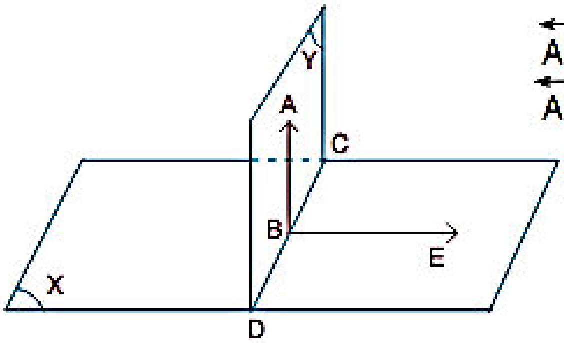
(و.هـ.م)

مبرهنة (8):

كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي أو يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر

اي انه:

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AB} \perp (X)\\ \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)\end{array}\right\} \Rightarrow (Y) \perp (X)$$



المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$

240

المطلوب اثباته:

$(Y) \perp (X)$

البرهان:

ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$B \in \overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة)

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$ (معطى)

$\therefore \sphericalangle ABE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$m \sphericalangle ABE = 90°$ (لان $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{CD} - (X) = 90°$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

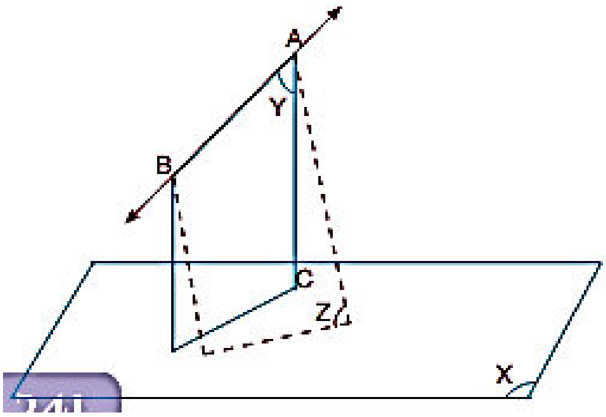
$\therefore (Y) \perp (X)$ (اذا كان قياس الزاوية الزوجية 90° فان المستويين متعامدان وبالعكس)

و . هـ . م

مبرهنة (9):

من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم.

اي انه:
$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)
فيوجد مستوي وحيد يحتوي $\overleftrightarrow{AB}$
وعمودي على (X)



المعطيات:
$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

المطلوب اثباته:
ايجاد مستوٍ وحيد يحتوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

البرهان:
من نقطة (A) نرسم $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\because \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستوٍ وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\therefore (Y) \perp (X)$ (مبرهنة 8)

ولبرهنة الوحدانية:
ليكن (Z) مستوي اخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

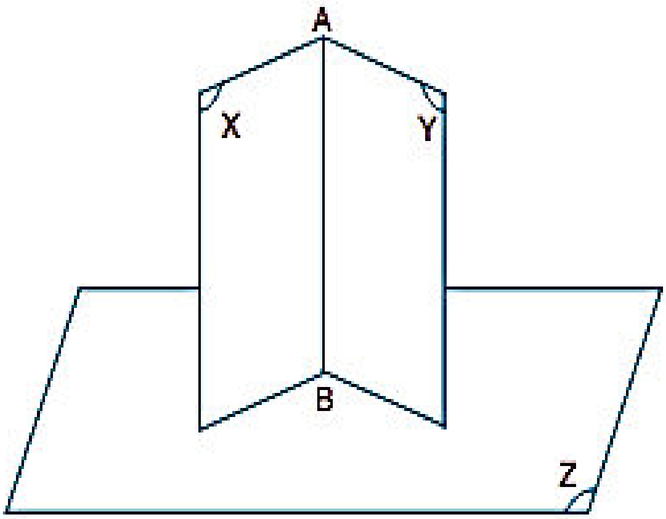
$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (بالبرهان)

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \subset (Z)$ (نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore (Y) = (Z)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما) و.هـ.م

نتيجة مبرهنة (9):

اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث.



المعطيات:

$(X)\cap(Y)=\overleftrightarrow{AB}$

$(X),(Y)\perp(Z)$

المطلوب اثباته:

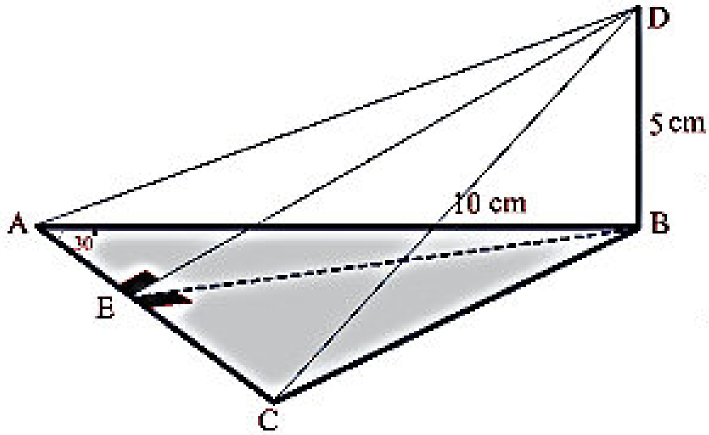
$\overleftrightarrow{AB}\perp(Z)$

البرهان:

ان لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودياً على (Z)

لما وجد اكثر من مستوي يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (Z) (مبرهنة 9)

$\therefore \overleftrightarrow{AB}\perp(Z)$ و.هـ.م



مثال – 1 –

في $\triangle ABC$

$\overline{BD} \perp (ABC)$; $m\sphericalangle A = 30°$

$AB = 10$ cm , $BD = 5$cm

جد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

المعطيات:

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m\sphericalangle BAC = 30°$, $AB = 10$ cm, $BD = 5$ cm

المطلوب اثباته:

ايجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

البرهان:

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على آخر من نقطة معلومة)

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\Leftarrow \sphericalangle DEB$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{AC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من اثره)

$\Leftarrow \triangle DBE$ قائم الزاوية في B

في $\triangle BEA$ القائم الزاوية في E

$$\sin 30° = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5cm$$

في $\triangle DBE$ القائم الزاوية في B :

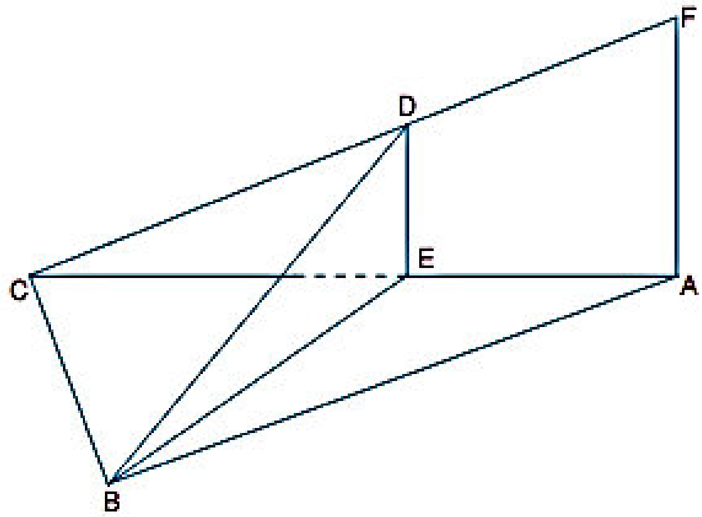
$$\tan(BED) = \frac{5}{5} = 1$$

$\therefore$ قياس $m\sphericalangle BED = 45°$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45°$ (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

و . هـ . م

مثال – 2 –



ليكن ABC مثلثاً وليكن

$\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن ان:

$\overline{BE} \perp (CAF)$

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$

المعطيات:

$\overline{AF} \perp (ABC), \overline{BE} \perp \overline{CA}, \overline{BD} \perp \overline{CF}$

المطلوب اثباته:

$\overline{DE} \perp \overline{CF}, \overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان:

$\because \overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore (CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة 8 :يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because \overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى)

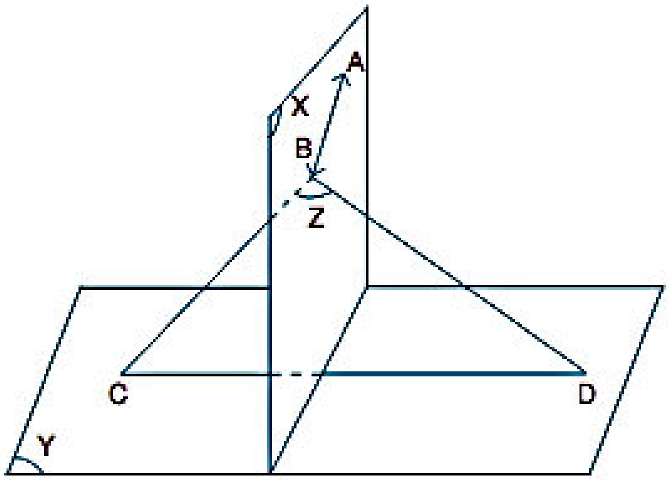
$\therefore \overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة 7: اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر)

$\because \overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

و.هـ.م

مثال - 3-



$(X),(Y)$ مستويان متعامدان

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$

ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

برهن ان:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المعطيات :

إن $(Y) \perp (X)$، $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ ، $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ عموديين على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان:

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوياً وحيداً يحويهما)

بما ان $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{BD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore (X) \perp (Z)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because (X) \perp (Y)$ (معطى)

ولما كان $(Z) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (لانه محتوى في كل منهما)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

(اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث)

و . هـ . م

تمارين (6-1)

1. برهن ان مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها .

2. برهن انه اذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوٍ آخر فان المستويين متعامدان .

3. برهن ان المستوي العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر ايضاً .

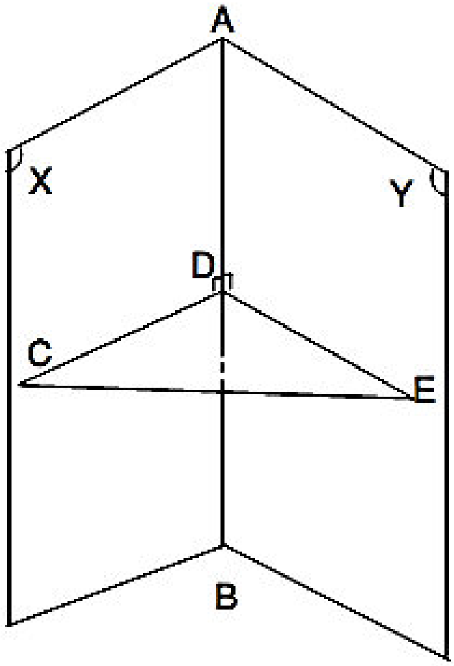
4. A,B,C,D اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $AB = AC$, $E \in \overline{BC}$ فاذا كانت $\sphericalangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A-\overline{BC}-D$ برهن ان $CD = BD$.

5. برهن انه اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عمودين على مستويين متقاطعين فان مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم .

6. دائرة قطرها $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة . برهن ان (CDA) عمودي على (CDB) .

تمارين (1-6)

س1 :برهن ان مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها .



المعطيات :

CDE زاوية عائدة للزاوية الزوجية

$(X)-\overline{AB}-(Y)$

المطلوب : $(CDE)\perp\overline{AB}$

البرهان :

$\overline{CD}\perp\overline{AB}$

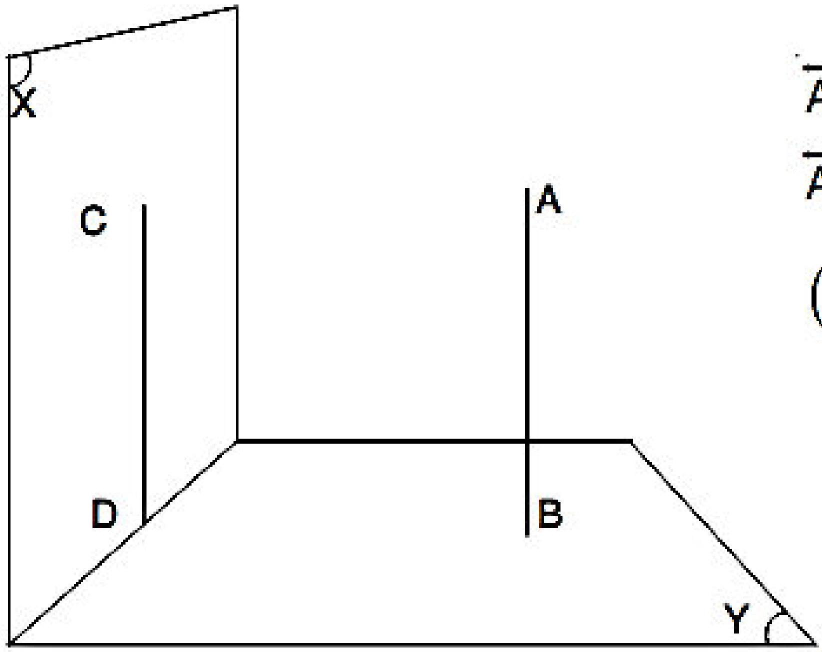
$\overline{ED}\perp\overline{AB}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore (CDE)\perp\overline{AB}$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

(و.هـ.م .)

س2 :برهن انه اذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوٍ آخر فان المستويين متعامدان .



المعطيات : $\overline{AB} \,//\, (X)$

$\overline{AB} \perp (Y)$

المطلوب : $(X) \perp (Y)$

البرهان : لتكن $C \in (X)$

نرسم $\overline{CD} \perp (Y)$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\because \overline{AB} \perp (Y)$ (معطى) $\Rightarrow \overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

(المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

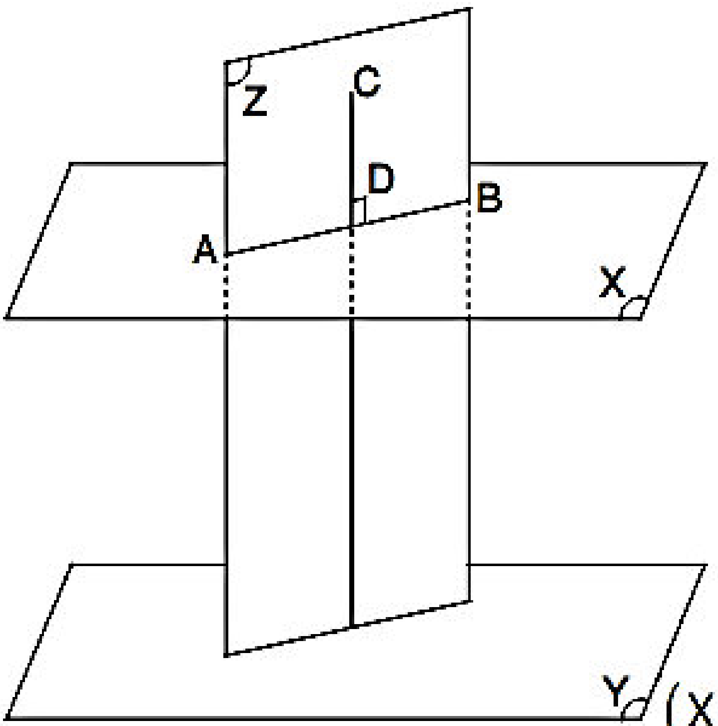
$\because C \in (X) \Rightarrow \overline{CD} \subset (X)$

اذا وازى مستقيم مستوياً فالمستقيم المرسوم من نقطة من نقط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوي)

$\therefore (X) \perp (Y)$ (مبرهنة 8)

(و.هـ.م.)

س3 :برهن ان المستوي العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر ايضاً .



المعطيات : $(X)//(Y),(Z)\perp(X)$

المطلوب : $(Z)\perp(Y)$

البرهان : ليكن $\overleftrightarrow{AB}=(X)\cap(Z)$ (اذا تقاطع مستويان فان المجموعة التقاطع مستقيم)

لتكن $C\in(Z)$ ، نرسم $\overleftrightarrow{CD}\subset(Z)$ بحيث $\overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$

(في المستوي الواحد : يمكن رسم مستقيم واحد فقط عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because(Z)\perp(X)$ (معطى) $\Rightarrow\overleftrightarrow{CD}\perp(X)$ (مبرهنه 7)

$\because(X)//(Y)$ (معطى) $\Rightarrow\overleftrightarrow{CD}\perp(Y)$

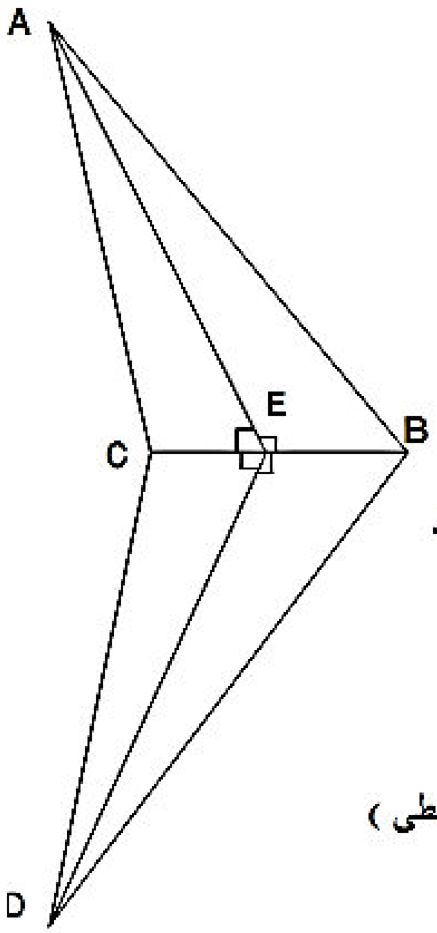
(المستقيم العمود على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore(Z)\perp(Y)$ (مبرهنه 8)

(و.هـ . م.)

س4: A,B,C,D اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $E \in \overline{BC}, AB = AC$

فأذا كانت $\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$ برهن ان $CD = BD$.



المعطيات: A,B,C,D أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد

$E \in \overline{BC}, AB = AC$

$\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$

المطلوب : $CD = BD$

البرهان : في ΔABC $AB = AC$ (معطى)

$\because \overline{AE} \perp \overline{BC}$ (تعريف العائدة)

$\therefore E$ منتصف $\overline{BC}$

(العمود المرسوم من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

في المثلثين CED, BED

$\overline{DE}$ (مشترك)

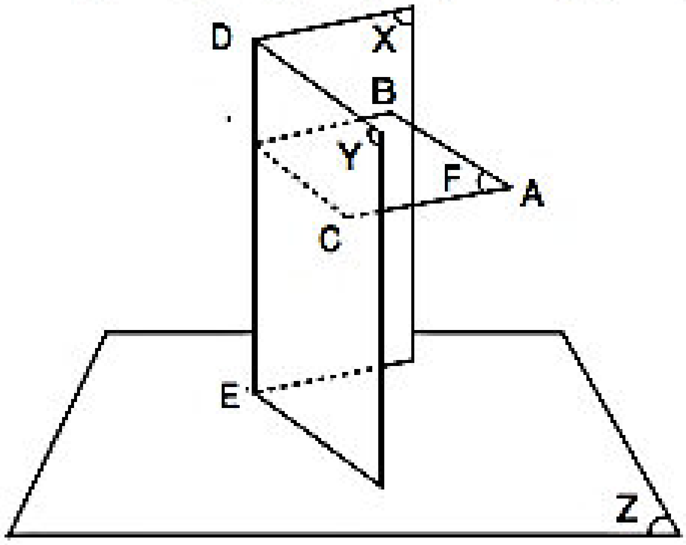
$CE = BE$ (بالبرهان)

$\measuredangle BED = \measuredangle CED$ قوائم (تعريف العائدة)

$\therefore$ يتطابق المثلثان (لتساوي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما)

وينتج $CD = BD$ (و.هـ.م.)

س5 :برهن اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عمودين على مستويين متقاطعين فأن مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم .



المعطيات :

$\overline{AB}, \overline{Ac} // (Z)$

$\overline{AB} \perp (X), \overline{AC} \perp (Y), (X) \cap (Y) = \overline{DE}$

المطلوب:

$\overline{DE} \perp (Z)$

البرهان :

$\because \overline{AB}, \overline{AC}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستوٍ وحيد مثل (F) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\therefore (F) // (Z)$

(اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً فان مستويهما يوازي ذلك المستوي)

$\because \overline{AB}, \perp (X)$ (معطى) $\Rightarrow (F) \perp (X)$

مبرهنة (8)

$\because \overline{AC} \perp (Y)$ (معطى) $\Rightarrow (F) \perp (Y)$

$\therefore \overline{DE} \perp (F)$ (نتيجة مبرهنة 9)

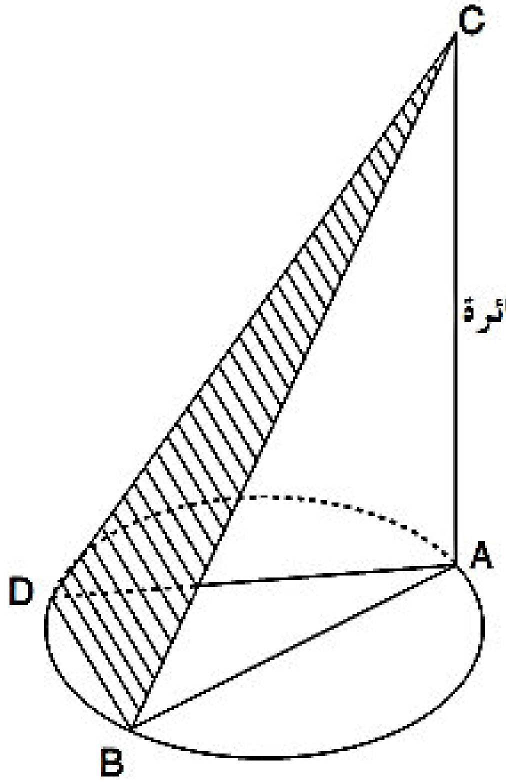
$\therefore \overline{DE} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

(و.هـ.م.)

مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية

س6 :دائرة قطرها $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة . برهن ان (CDA) عمودي على (CDB) .



المعطيات : دائرة قطرها $\overline{AB}$

$\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة

المطلوب : $(CDA) \perp (CDB)$

البرهان :

$\because \overline{AB}$ قطر الدائرة (معطى)

$\therefore \sphericalangle ADB = 90^0$

(الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة)

$\because \overline{AC} \perp (ADB)$ (معطى)

$\overline{AD} \perp \overline{DB}$ بالبرهان

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{DB}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore \overline{DB} \perp (CDA)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\therefore (CDA) \perp (CDB)$ (مبرهنة 8)

(و.هـ.م.)

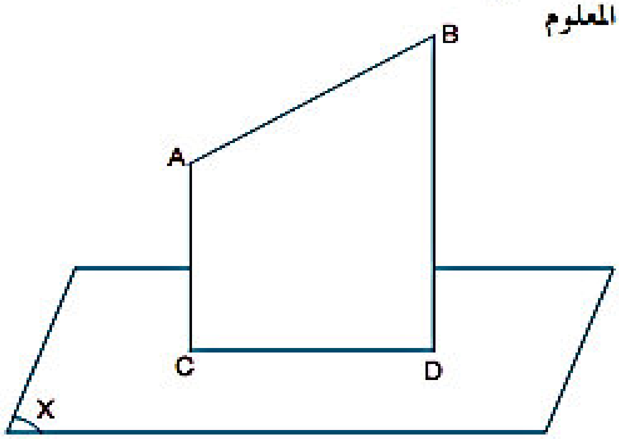
مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية

(6–3) الاسقاط العمودي على مستو
The Orthogonal Projection on a Plane

1) مسقط نقطة على مستوٍ: هو أثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي.

2) مسقط مجموعة نقط على مستوي: لتكن L مجموعة من نقاط في الفراغ فان مسقطها هو مجموعة كل اثار الاعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي .

3) مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم: هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم



ليكن $\overline{AB}$ غير عمودي على (X) وليكن

$\overline{AC} \perp (X) \Leftarrow$ مسقط A على (X) هو C

$\overline{BD} \perp (X) \Leftarrow$ مسقط B على (X) هو D

$\therefore$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) هو $\overline{CD}$

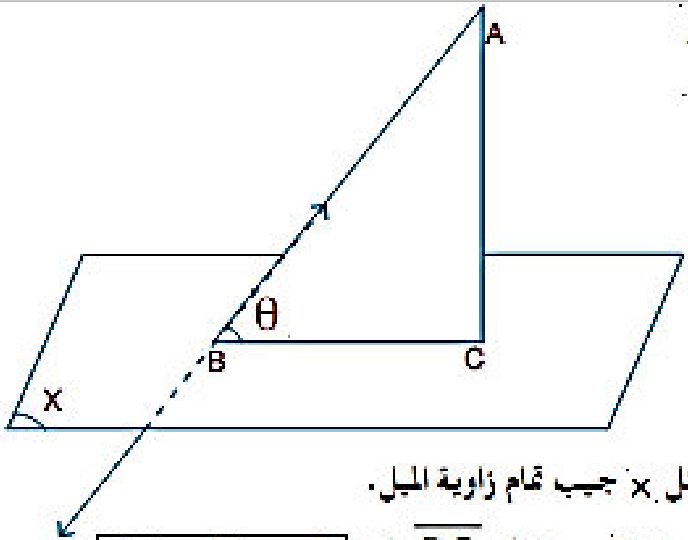
ملاحظة
اذا كان $\overline{AB} \,//\, (X)$
فان $AB = CD$

4) المستقيم المائل (Inclined Line) على مستوٍ: هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له

5) زاوية الميل (Angle of Inclination): هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي.

ليكن $\overleftrightarrow{AB}$ مائلاً على (X) في B

وليكن $\overline{AC} \perp (X)$ في C



$\therefore$ C مسقط A على (X) حيث $A \notin (X)$

كذلك B مسقط نفسها حيث $B \in (X)$

$\Leftarrow \overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

اي ان $0 < \theta < 90°$

$\theta \in (0, 90°)$

6) طول المسقط

طول مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ = طول المائل × جيب تمام زاوية الميل.

فعندما تكون $\overline{AB}$ مائلاً على (X) وزاوية ميله θ ومسقطه $\overline{BC}$ فان $\boxed{BC = AB\cos\theta}$

7) مسقط مستوي مائل (Inclined Plane) على (X)

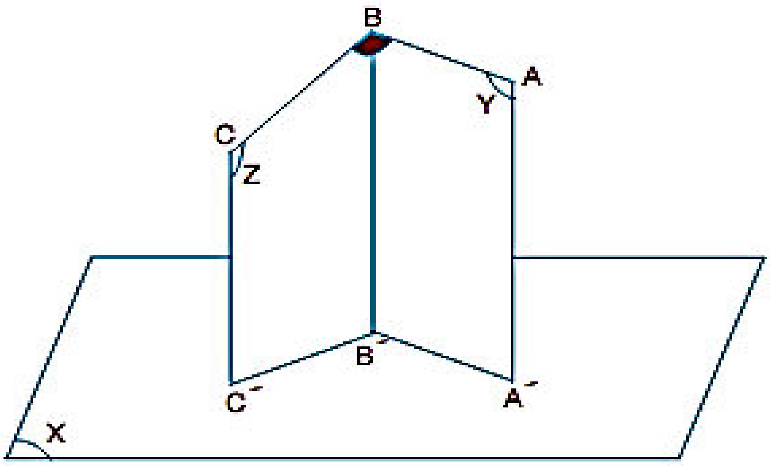
زاوية ميل مستوٍ على مستوٍ معلوم هو قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما

مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوٍ معلوم = مساحة المنطقة المائلة × جيب تمام زاوية الميل

لكن A مساحة المنطقة المائلة ، A' مساحة المسقط ، θ قياس زاوية الميل $\boxed{A' = A.\cos\theta}$

مثال – 4 –

اذا وازى احد ضلعي زاوية قائمة مستوياً معلوماً فان مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان.



المعطيات:

ABC زاوية قائمة في B

$\overline{AB} // (X)$ ،

$\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{B'C'}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (X)

المطلوب اثباته:

$\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$

مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية

البرهان:

معطى $\begin{cases} \overline{A'B'} \text{ مسقط } \overline{AB} \\ \overline{B'C'} \text{ مسقط } \overline{BC} \end{cases}$

$\Leftarrow (X) \perp \overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة).

$\overline{AA'} // \overline{BB'}$ ، $\overline{BB'} // \overline{CC'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

بالمستقيمين المتوازيين $\overline{BB'}$ ، $\overline{AA'}$ نعين (Y)
بالمستقيمين المتوازيين $\overline{CC'}$ ، $\overline{BB'}$ نعين (Z)
(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

لكن $\overline{AB} // (X)$ (معطى)

$(Y) \cap (X) = \overline{A'B'}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$\Leftarrow \overline{AB} // \overline{A'B'}$ (اذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم)

كذلك $\overline{A'B'} \perp \overline{BB'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\overline{BB'} \perp \overline{AB}$ (في المستوي الواحد : المستقيم العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

لكن $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ (لان $M \measuredangle ABC = 90°$ معطى)

$(Z) \perp \overline{AB}$ (المستقيم العمودي على مستقيمن متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

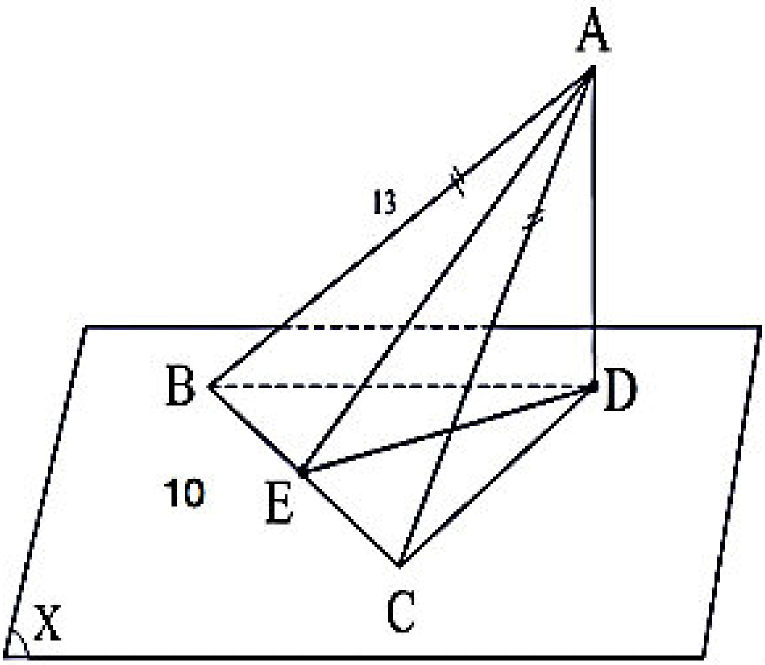
$\Leftarrow (Z) \perp \overline{A'B'}$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore \overline{B'C'} \perp \overline{A'B'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

و . هـ . م

مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية

مثال – 5 –



ABC مثلث ، $\overline{BC} \subset (X)$
والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث
ABC والمستوي (X)
قياسها $60°$ فاذا كان
$AB = AC = 13cm, BC = 10cm$
جد مسقط المثلث (ABC) على (X)
ثم جد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

المعطيات:
$\triangle ABC, \overline{BC} \subset (X)$
قياس $(ABC) - \overline{BC} - (X) = 60°$
$AB = AC = 13, BC = 10$

المطلوب اثباته:
ايجاد مسقط $\triangle ABC$ على (X) وايجاد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

البرهان:

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ في D (يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة)

$\therefore$ $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$
$\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$
$\overline{BC}$ مسقط نفسه على (X)

(مسقط قطعة مستقيم على مستو معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\therefore \triangle BCD$ مسقط $\triangle ABC$ على (X)

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم عمود على آخر من نقطة معلومة)

وبما أن $AC = AB$ (معطى)

$\therefore EC = BE = 5cm$ (العمود النازل من راس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

$\therefore \sphericalangle DEA$ عائدة للزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

لكن قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60°$ (معطى)

في $\triangle AEB$ القائم في E :

$$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12cm$$

في $\triangle AED$ القائم في D

$$\cos 60° = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6cm$$

$$\text{BCD مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30cm^2$$

و. هـ. م

ملاحظة

لو طلب مساحة المسقط فقط فيمكن ايجاده كالآتي:

$$\text{مساحة BCD} = \text{مساحة ABC} \times \cos 60°$$

$$= \frac{1}{2} \times (12 \times 10 \times \frac{1}{2}) = 30cm^2$$

و. هـ. م

تمارين (6-2)

1. برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستو معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه.

2. برهن أنه إذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فان ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر .

3. برهن على أن للمستقيمات المتوازية المائلة على مستو الميل نفسه

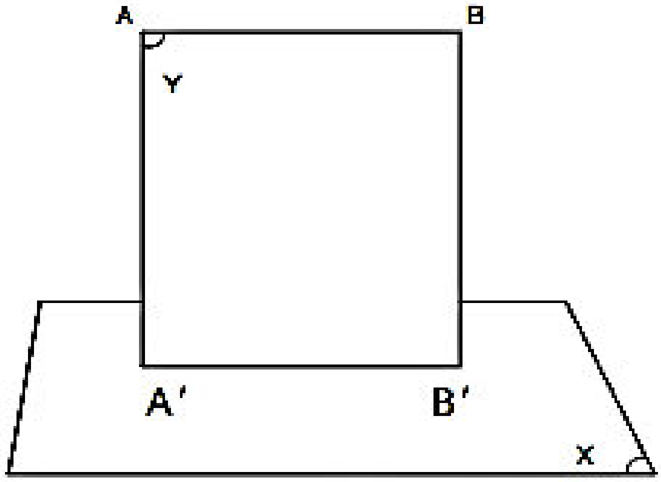
4. برهن على أنه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستو معلوم فان أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه.

5. برهن على أنه إذا رسم مائلان من نقطة ما الى مستو فأصغرهما ميلاً هو الاطول .

6. برهن على أن زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ اصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه واي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي.

تمارين (2-6)

س1 : برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستو معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه .



المعطيات : $\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X) , $\overline{AB} // (X)$

المطلوب : $\overline{AB} // \overline{A'B'}$, $AB = A'B'$

البرهان : $\because$ $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ عمودان على (X) (تعريف المسقط)

$\therefore$ $\overline{AA'} // \overline{BB'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

نعين المستوي (Y) بالمستقيمين المتوازيين $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ $\therefore$

(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\because$ $\overline{AB} // (X)$ (معطى)

$\overline{AB} // \overline{A'B'}$

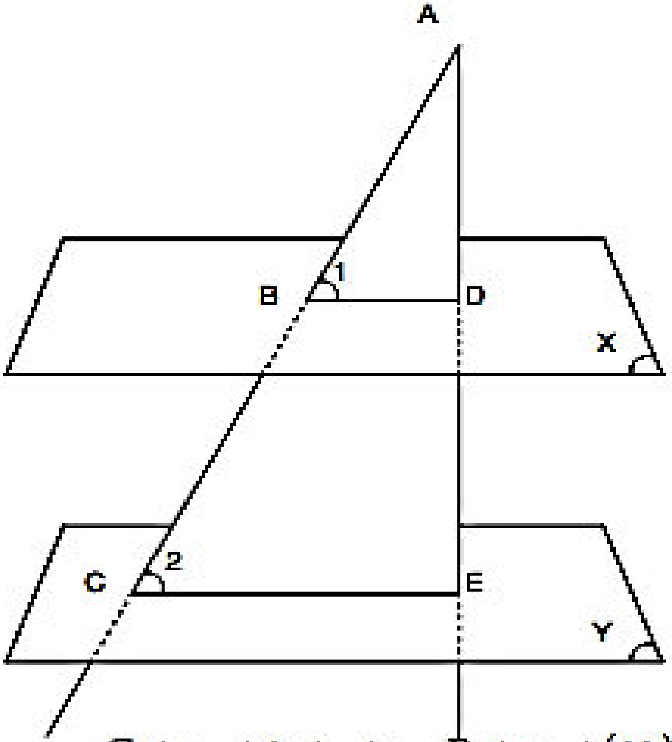
(اذا وازى مستقيم مستوياً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم)

$\therefore$ $ABB'A'$ متوازي اضلاع (لتوازي كل ضلعين متقابلين فيه)

$\therefore AB = A'B'$ (يتساوى طولا الضلعين المتقابلين في متوازي الاضلاع)

(و.هـ.م .)

س2 :برهن أن إذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فان ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر .



المعطيات : $(Y)//(X)$ ، $\overline{AC}$ يقطع (X) في نقطة B ويقطع (Y) في نقطة C

المطلوب : ميل $\overline{AC}$ على (X) = ميل $\overline{AC}$ على (Y)

البرهان : نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي من نقطة معلومة) أذن $\overline{AD} \perp (Y)$ في E

(المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

$\therefore$ $\overline{DB}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{EC}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (Y) (تعريف مسقط قطعة مستقيم)

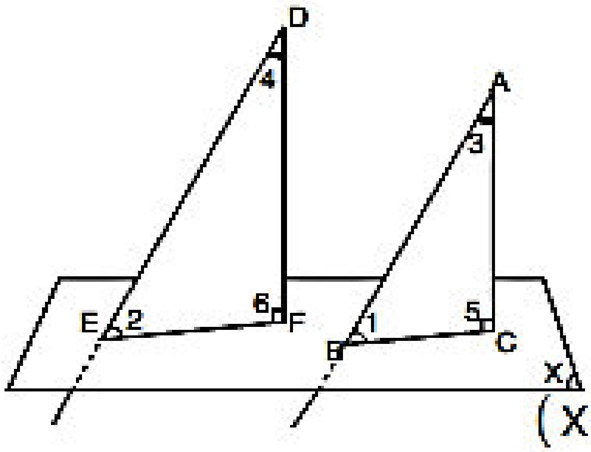
$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) (زاوية الميل : هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (Y)

$m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (متناظرة)

$\therefore$ ميل $\overline{AC}$ على (X) = ميل $\overline{AC}$ على (Y) (و.هـ.م .)

س3 : برهن على أن للمستقيمات المتوازية المائلة على مستوٍ الميل نفسه .



المعطيات : $\overline{AB} // \overline{DE}$

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{DE}$ على (X)

المطلوب : $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$

البرهان : $\because$ $\measuredangle 1$ ، $\measuredangle 2$ هما زاويتي ميل $\overline{AB}$ ، $\overline{DE}$

$\therefore$ $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) (زاوية ميل مستقيم على مستوي هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\overline{EF}$ مسقط $\overline{DF}$ على (X)

$\therefore \overline{AC} \perp (X), \overline{DF} \perp (X)$

$\overline{AC} \perp \overline{BC}, \overline{DF} \perp \overline{EF}$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره في ذلك المستوي)

$\therefore m\measuredangle 5 = m\measuredangle 6$ (قوائم)

$\overline{AB} // \overline{DE}$ (معطى)

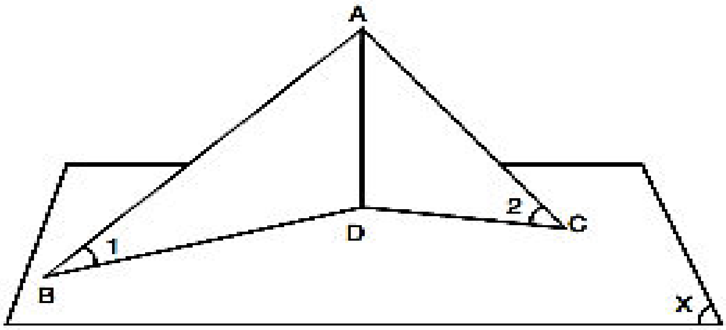
$\overline{AC} // \overline{DF}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

(اذا وازى ضلعا زاوية اخرى تساوي قياسهما)

$\therefore m\measuredangle 3 = m\measuredangle 4$

$\therefore m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (لان مجموع زوايا المثلث 180^0) (و.هـ.م)

س4 :برهن على أنه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم فان أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه .



المعطيات : $\overline{AC}, \overline{AB}$ مائلان على (X) ، $AB > AC$

المطلوب : زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) أصغر من زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

البرهان : نرسم $\overline{AD} \perp (X)$

(يمكن رسم عمود واحد فقط على مستوٍ من نقطة معلومة)

فيكون $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (X)

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودي على مستوي هو قطعة المستقيم الواصلة بين أثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

$\sphericalangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)

$\sphericalangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

(زاوية الميل : هي الزاوية المحدده بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\because AB > AC$ (معطى)

$\frac{1}{AB} < \frac{1}{AC}$ (خواص التباين)

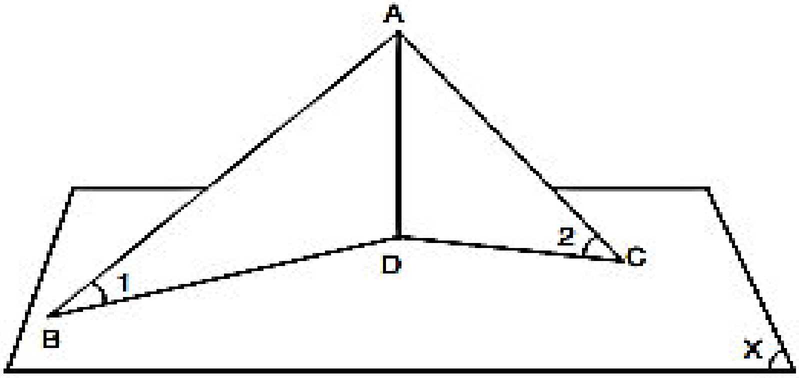
$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$

$\sin\sphericalangle 1 < \sin\sphericalangle 2$ $\sphericalangle 1 , \sphericalangle 2$ زوايا حادة

$\therefore m\sphericalangle 1 < m\sphericalangle 2$ (و.هـ.م)

مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية

س5 : برهن على أنه إذا رسم مائلان من نقطة ما الى مستو فأصغرهما ميلاً هو الاطول .



المعطيات : $\overline{AC}, \overline{AB}$ مائلان على (X)
$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)
$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)
$m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$

المطلوب : $AB > AC$

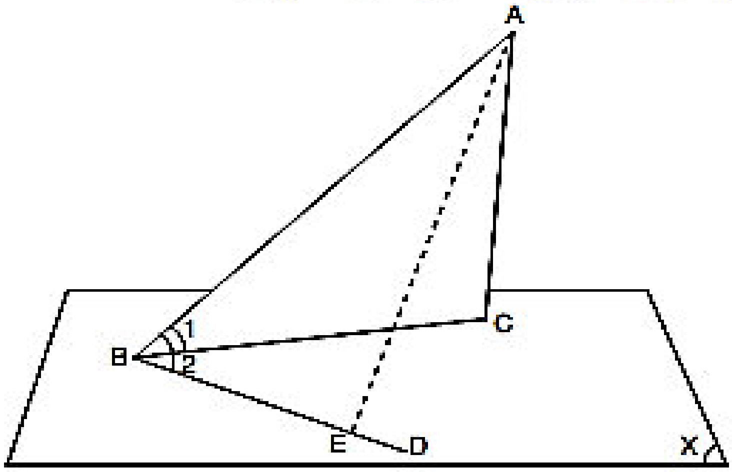
البرهان :

$\because$ $\measuredangle 1$ ، $\measuredangle 2$ هما زاويتي ميل $\overline{AC}, \overline{AB}$ على (X) على الترتيب
$\therefore$ $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)
$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (X)
(زاوية ميل مستقيم على مستوي هي الزاوية المحدده بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\therefore$ $\overline{AD} \perp (X)$ نرسم
(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوي هي قطعة المستقيم المحدده بين أثري العمودين المرسومين من طرفي تلك القطعة على المستوي)
$\therefore \overline{AD} \perp \overline{BD}, \overline{CD}$
(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومه من أثره في ذلك المستوي)
$\because m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$ (معطى)
$\therefore \sin\measuredangle 1 < \sin\measuredangle 2$
$$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{1}{AB} < \frac{1}{AC} \Rightarrow AB > AC$$ (خواص التباين)

(و.هـ.م.)

س6 :برهن على أن الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ اصغر من الزاويه المحصورة بين المستقيم نفسه واي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي .



المعطيات : ليكن $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\sphericalangle ABC$ زاوية الميل ، $\overline{BD} \subset (X)$

المطلوب : $m\sphericalangle ABC < m\sphericalangle ABD$

البرهان : لتكن $E \in \overline{BD}$ بحيث $BC = BE$

نصل $\overline{AE}$

$\because \overline{AC} \perp (X)$ (تعريف المسقط)

$AC < AE$

(العمود : هو أقصر مسافة بين نقطه ومستوي)

$BC = BE$ (بالعمل) ، $AB = AB$ (مشترك)

$\therefore m\sphericalangle 1 < m\sphericalangle 2$

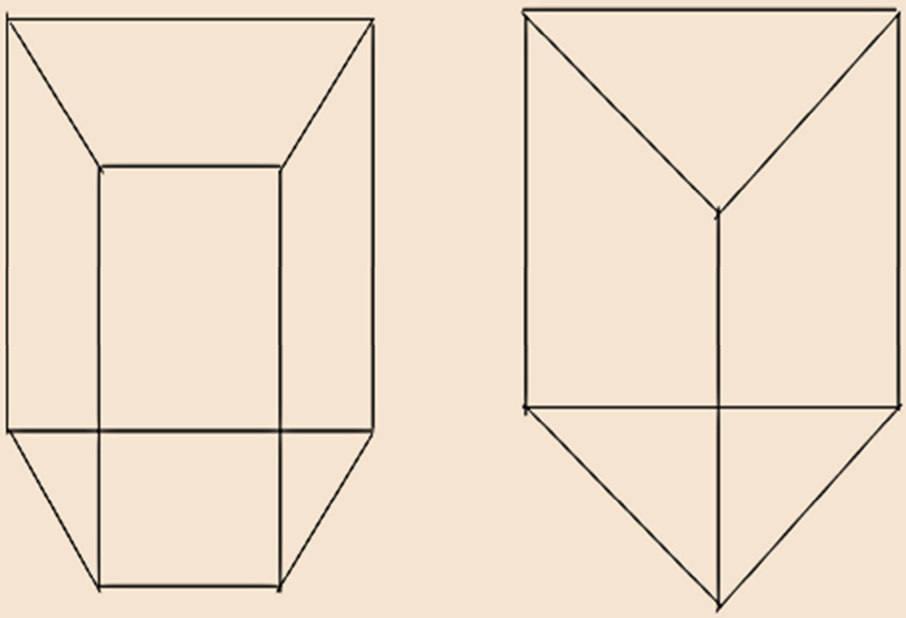
(اذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث آخر وأختلف الضلعان الآخران فاصغرهما يقابل أصغر الزاويتين)

(و.هـ.م .)

[6-4] المجسمات (Solid)

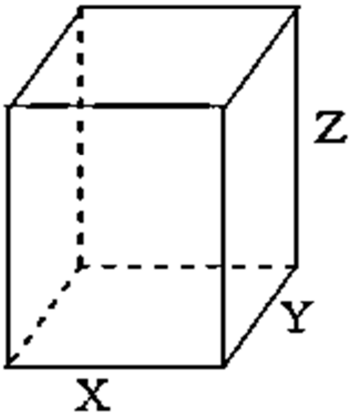
مسلم الخزاعي / ع. النجف المركزية

1) الموشور (المنشور) القائم (Right Prism)

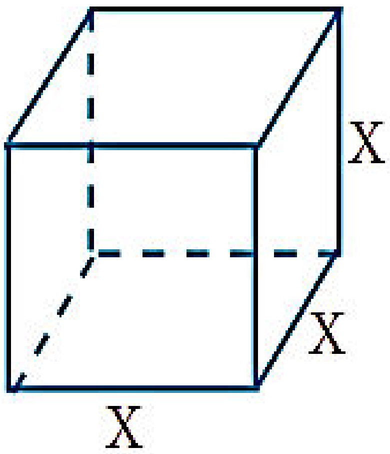
الرسم Diagram	
الحجم Volume	مساحة القاعدة x الارتفاع
المساحة الجانبية Lateral Area	مجموع مساحات الاوجه الجانبية = محيط القاعدة x الارتفاع
المساحة الكلية Total Area	المساحة الجانبية + مساحة قاعدتين

مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية

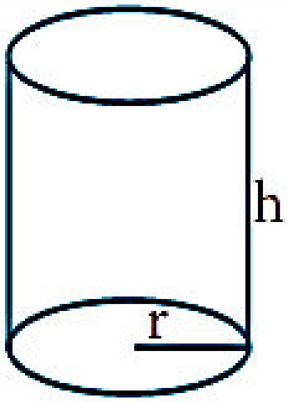
2) متوازي السطوح المستطيلة (متوازي المستطيلات) (ParallelPiped)

	الرسم Diagram
$V = x\,y\,z$	Volume الحجم
$L.A = 2(x+y)z$	Lateral Area المساحة الجانبية
$T.A = 2(x+y)z + 2xy$	Total Area المساحة الكلية

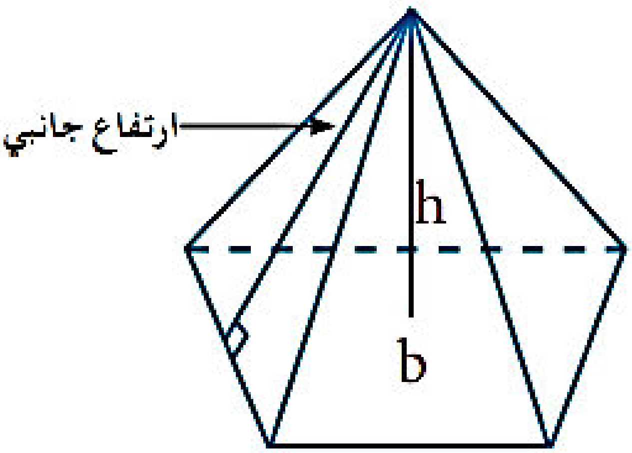
3) المكعب (Cube)

	الرسم Diagram
$V = x^3$	Volume الحجم
$L.A = 4x^2$	Lateral Area المساحة الجانبية
$T.A = 6x^2$	Total Area المساحة الكلية

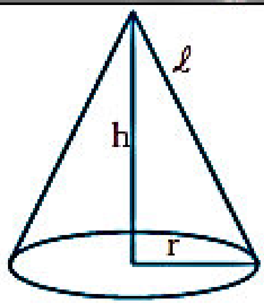
4) الاسطوانة الدائرية القائمة (Right Circular Cylinder)

	الرسم Diagram
$V = \pi r^2 h$	Volume الحجم
$L.A = 2\pi rh$	Lateral Area المساحة الجانبية
$T.A = 2\pi rh + 2\pi r^2$	Total Area المساحة الكلية

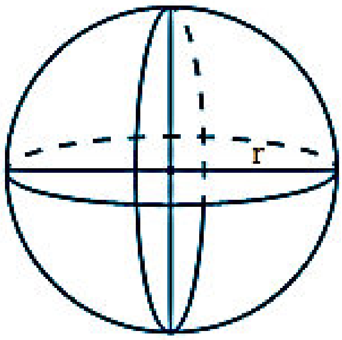
5) الهرم (Pyramid)

	الرسم Diagram
الارتفاع : h مساحة القاعدة : b $V = \frac{1}{3} b h$	Volume الحجم
$L.A = \frac{1}{2}$ (محيط القاعدة) x طول الارتفاع الجانبي	Lateral Area المساحة الجانبية
T.A = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة	Total Area المساحة الكلية

6) المخروط الدائري القائم (Right Circular Cone)

	الرسم Diagram
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	الحجم Volume
$L.A = \pi r \ell$	Lateral Area المساحة الجانبية
$T.A = \pi r \ell + \pi r^2$	Total Area المساحة الكلية

7) الكرة (Sphere)

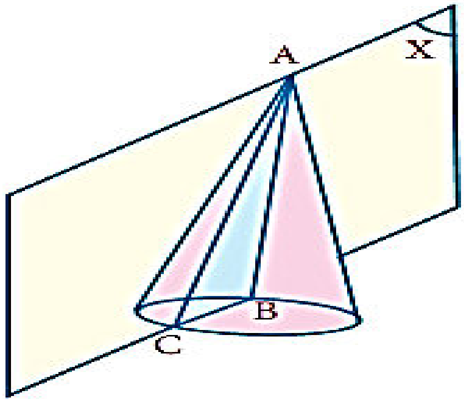
	الرسم Diagram
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	الحجم Volume
مساحة سطح الكرة = مساحة 4 دوائر عظيمة = $4\pi r^2$ $S = 4\pi r^2$	مساحة سطح الكرة

ملاحظة

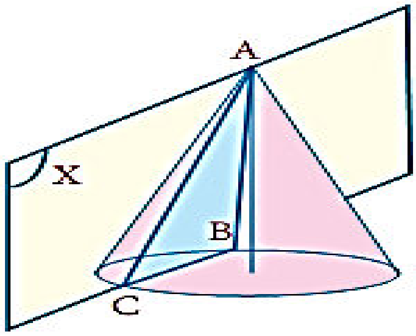
1) ذو الوجوه الاربعة المنتظم: هرم ثلاثي قائم منتظم اوجهه الاربعة مثلثات متساوية الاضلاع ومتطابقة

2) اذا قطع المخروط الدائري بمستوي مار من احد مولداته فان المقطع مثلث ويكون المثلث في المخروط الدائري القائم متساوي الساقين

مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية



مخروط دائري مائل
$\Leftarrow AC \neq AB$



مخروط دائري قائم
$\Leftarrow AC = AB$

تمارين (3-6)

1. اذا كانت المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = $724cm^2$ ومساحة قاعدته = $132cm^2$ ومساحة احد اوجهه الجانبية = $110cm^2$ جد حجمه.

2. اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $400\pi cm^2$ وحجمها $2000\pi cm^3$ اوجد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها.

3. برهن على ان حجم ذي الوجوه الاربعة المنتظم والذي طول حرفه = ℓ هو $\dfrac{\sqrt{2}\,\ell^3}{12}$ وحدة مكعبة.

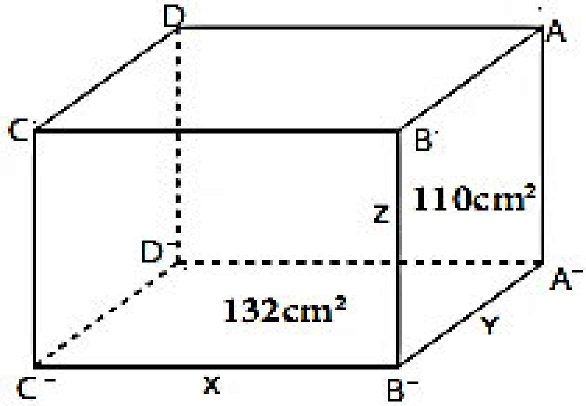
4. مخروط دائري قائم مرّ برأسه مستوٍ فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعدة بمقدار 8cm فاذا كانت مساحة المقطع = $102cm^2$ وارتفاع المخروط = 15cm احسب:

1) حجمه   2) مساحته الجانبية   3) مساحته الكلية

5. اذا علمت انه يمكن رسم كرة خارج ذي الوجوه الاربعة المنتظم.
برهن ان نصف قطر الكرة = $\dfrac{3}{4}$ الارتفاع.

تمارين (3-6)

س1 : اذا كانت المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات $=724cm^2$ ومساحة قاعدته $=132cm^2$ ومساحة احد اوجهه الجانبية $=110cm^2$ جد حجمه .



المعطيات :متوازي المستطيلات

مساحته الكلية $=724cm^2$ ومساحة قاعدته $=132cm^2$

ومساحة احد اوجهه الجانبية $=110cm^2$

المطلوب : ايجاد حجمه

البرهان : نفرض أبعاده x, y, z

مساحة الوجهين المتقابلين $724-(2\times132+2\times110)=(BC'),(AD')$

$724-(264+220)=724-484=240cm^2$

$\therefore$ مساحة الوجه (BC') هي $\dfrac{240}{2}=120cm^2$

$\therefore x.y=132......(1)$

$y.z=110.......(2)$

$x.z=120.......(3)$

وبضرب المعادلات الثلاثة $\Rightarrow x^2y^2z^2=132\times110\times120$

$(xyz)^2=12\times11\times10\times11\times10\times12$

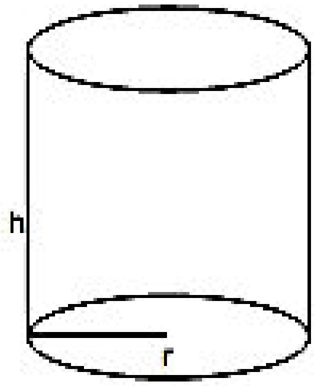
وبجذر الطرفين $xyz=12\times11\times10$

$\therefore v=1320cm^3$

وزاري ٢٠١٣/١ المساحة الكلية $180cm^2$ ومساحة قاعدته $48cm^2$ ومساحة احد اوجهه الجانبية $24cm^2$ فجد حجمه ؟

مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية

س2 : اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $400\pi cm^2$ وحجمها $2000\pi cm^3$ اوجد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها .



المعطيات :

اسطوانه دائريه قائمة مساحتها الجانبية = $400\pi\ cm^2$

وحجمها = $2000\pi\ cm^3$

المطلوب :ايجاد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها

البرهان :

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة x الارتفاع $\quad v=\pi r^2 h$

$$\therefore 2000\cancel{\pi}=\cancel{\pi}r^2h \Rightarrow 2000 = r^2h........(1)$$

المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة x الارتفاع $\quad L.A = 2\pi rh$

$$400\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi}rh \xrightarrow{\div 2} 200 = rh.......(2)$$

بقسمة (1) على (2)

$$\frac{2000}{200} = \frac{r^2h}{rh}$$

$r = 10cm$ نصف القطر

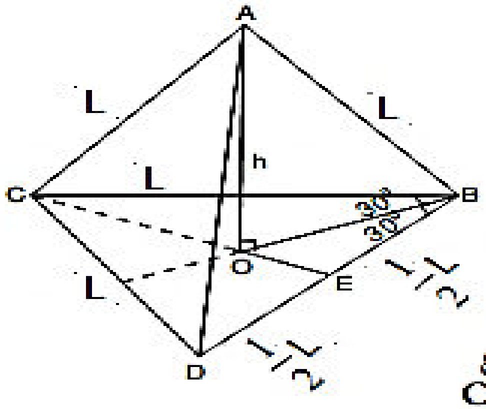
نعوض في (2)

$$200 = 10h$$

$h = 20cm$ الارتفاع

(و.هـ.م.)

س3 : برهن على ان حجم ذي الوجوه الاربعة المنتظم والذي طول حرفه $=L$ وحدة هو $v=\frac{\sqrt{2}L^3}{12}$ وحدة مكعبة .



المعطيات :
$A-BCD$ ذو الوجوه الاربعة المنتظم
وطول حرفه L

المطلوب : $v=\frac{\sqrt{2}L^3}{12}$

البرهان : القاعدة BCD مثلث متساوي الاضلاع
نرسم الاعمدة المنصفة للاضلاع فتلتقي في نقطة O

في مثلث BOE القائم في E

$$\cos 30° = \frac{BE}{BO} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{2}L}{BO}$$

$$\sqrt{3}BO = L \Rightarrow BO = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2 \quad \text{(فيثاغورس)}$$

$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow h^2 = L^2 - \frac{L^2}{3} = \frac{2L^2}{3} \Rightarrow \therefore h = \frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{3}} \text{ وحدة}$$

حجم الهرم $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث BCD تساوي $\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$

(b: مساحة القاعدة)

$$v = \frac{1}{3}bh$$

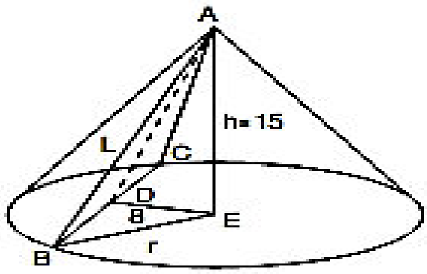
$$\therefore v = \frac{1}{3} \times \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{4}L^2 \times \frac{\sqrt{2}L}{\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}L^3}{12} \text{ وحدةمكعبة}$$

(و.هـ.م.)

ملاحظة

مساحة مثلث متساوي الاضلاع $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ مربع الضلع

س4 :مخروط دائري قائم مر برأسه مستوٍ فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعدة بمقدار 8cm فاذا كانت القطع $=102cm^2$ وارتفاع المخروط$=15cm$ احسب :
1) حجمه 2) مساحته الجانبية 3) مساحته الكلية



المعطيات : مخروط دائري مر مستوي برأسه A فقطع قاعدته في $\overline{BC}$ والتي تبعد عن المركز 8cm ، مساحة القطع $h = 15cm, ABC = 102cm^2$

المطلوب :1 – الحجم 2 – المساحة الجانبية 3 – المساحة الكلية

البرهان : في مثلث AED القائم في E

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$(AD)^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$ (فيثاغورس)

$\therefore AD = \sqrt{289} = 17cm$

$\left.\begin{array}{l}\overline{AE} \perp \text{مستوي القاعدة} \\ \overline{ED} \perp \overline{BC}\end{array}\right\} \Rightarrow \therefore \overline{AD} \perp \overline{BC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

مساحة المثلث ABC تساوي $\frac{1}{2} BC \times AD$

$102 = \frac{1}{2} BC \times 17 \Rightarrow BC = \frac{(102)(2)}{17} = 12cm$

$\therefore BD = CD = 6cm$ (العمود النازل من مركز دائرة على وتر فيها ينصفه)

في مثلث EDB القائم في D

$r^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ (فيثاغورس)

$\therefore r = 10cm$

في مثلث AEB القائم في E (فيثاغورس)

$L^2 = 15^2 + 10^2 = 325$

$\therefore L = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}cm$

1) $V = \frac{1}{3}\pi \times 100 \times 15 = 500\pi \ cm^3$ الحجم

المساحة الجانبية

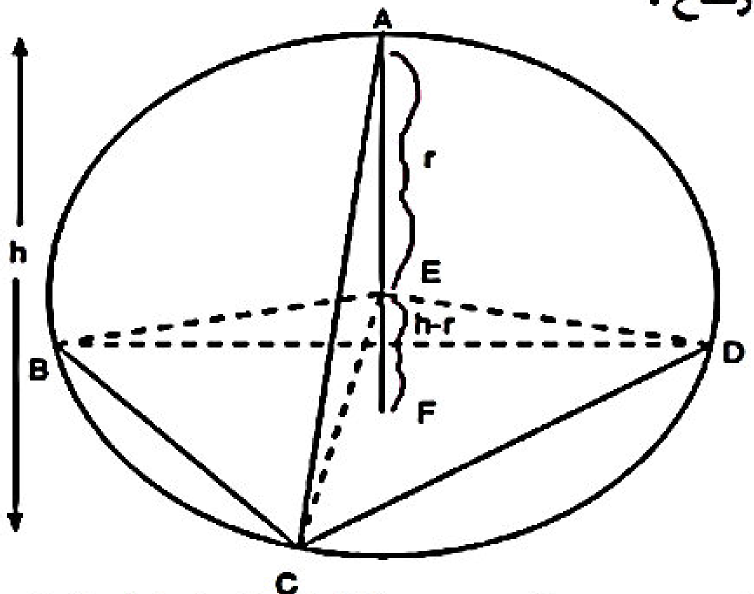
2) $L.A = \pi r L = \pi \times 10 \times 5\sqrt{13} = 50\sqrt{13}\pi \ cm^2$

3) $T.A = \pi r L + \pi r^2 = 50\sqrt{13}\pi + 100\pi = 50\pi\left(\sqrt{13} + 2\right) \ cm^2$

المساحة الكلية

مسلم الخزاعي
07812847842
ع. النجف المركزية

س5: اذا علمت انه يمكن رسم كرة خارج ذي الوجوه الاربعة المنتظم
برهن ان نصف قطر الكرة $= \frac{3}{4}$ الارتفاع .



المعطيات : $A-BCD$ شكل ذي اربع وجوه منتظم مرسوم داخل كرة نصف قطرها $r=$

المطلوب اثباته : $r=\frac{3}{4}h$ (حيث h ارتفاع الهرم)

البرهان :

$AF=h, AE=r \Rightarrow EF=h-r$

نصل مركز الكرة E برؤوس الهرم

$\therefore$ ينقسم الهرم $A-BCD$ الى اربعة اهرامات متساوية بالحجم (لتساوي القاعدة والارتفاع)

وهي:- $E-BCD$, $E-ACD$, $E-ABD$, $E-ABC$

$\therefore$ حجم ذي الوجوه الاربعة $= 4 \times$ حجم الهرم $E-BCD$

لتكن مساحة القاعدة $=b$

$\therefore \frac{1}{3}\cancel{b}.h = 4\times\frac{1}{3}\cancel{b}(h-r)$

$h=4h-4r$

$4r=3h$

$r=\frac{3}{4}h$ (و.هـ.م)

وقل ربي زدني علما

لاتدع قلمك يسبق فكرك وكن متأنيا" في اجابتك

مع تمنياتي لكم النجاح بتفوق ولا تنسونا بالدعاء لي ولوالدي

اذا كان لديك اي سؤال في منهج الرياضيات يمكنك طرحه عبر منتدى الاستاذ مسلم الخزاعي ضمن منتدى الرياضيات العراقي (على الكوكل) او من خلال الرابط التالي :-

http://alnasiry.net/forums/forumdisplay.php?f=231

مسلم الخزاعي / ع. النجف المركزية