بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

الفصل الأول

[1-1] طرائق العد Counting methods

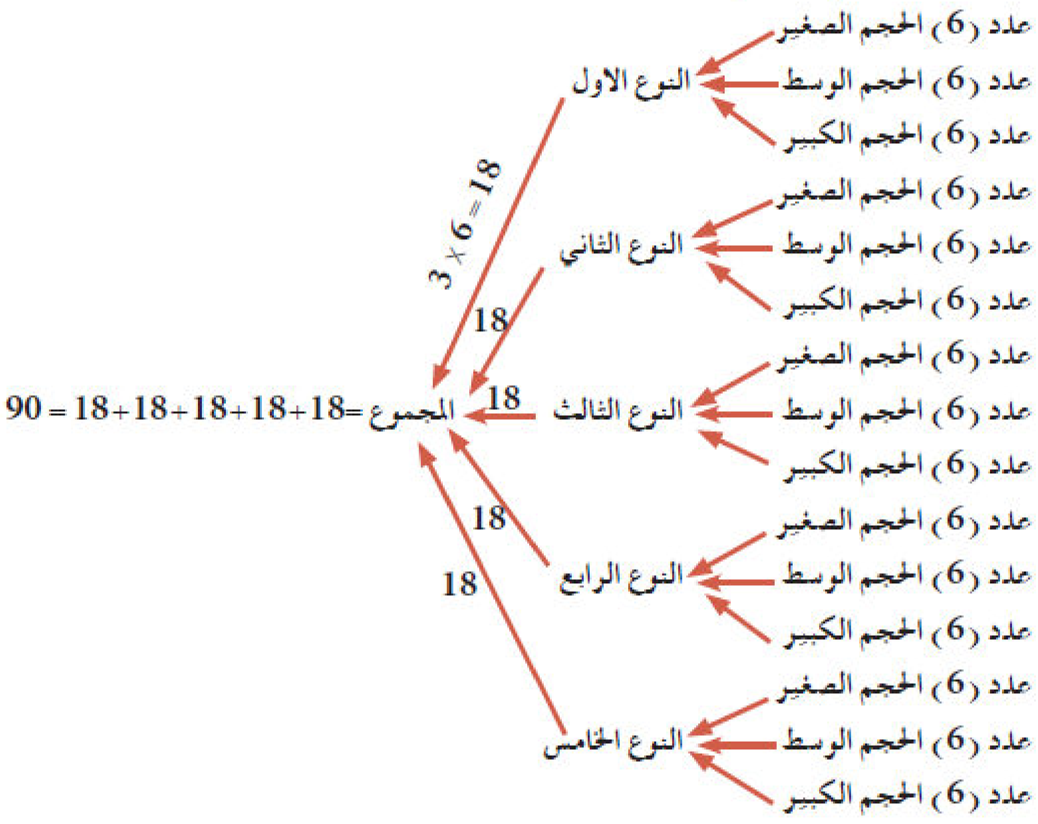
نضع بين يديكم أمثلة الكتاب ثم الأمثلة الخارجية ثم نضع أسئلة وزارية سابقة كما نقوم أن شاء الله بحل أسئلة الكتاب

مثال 1

اعلن صاحب محل لبيع الدراجات الهوائية انه يوجد لديه خمسة انواع من الدراجات ومن كل نوع توجد ثلاثة احجام ومن كل حجم يوجد ست دراجات فما عدد الدراجات في المحل؟

الحل

مخطط الشجرة Tree Diagram



عدد الدراجات = $5\times3\times6 = 90$ دراجة

مثال 2

اعلن علي احد بائعي البدلات الرجالية ان لديه اكبر تشكيلة من البدلات حيث يوجد في محله (5) موديلات ومن كل موديل يوجد (10) قياسات مختلفة ومن كل قياس يوجد (7) الوان مختلفة فما عدد البدلات الموجودة في المحل؟

الحل

يمكن توضيح هذا المثال بمخطط كما في المثال الاول ويكون من السهل حساب عدد البدلات كما يلي :

عدد البدلات = $5\times10\times7$

$=350$ بدلة

مثال 3

اذا كانت لدينا الحروف أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ز .كم كلمة (بمعنى او بدون معنى) يمكن تكوينها بحيث تكون مكونه من اربعة حروف على أن لا يسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة؟

الحل

عدد طرق اختيار الحرف الاول = 6

عدد طرق اختيار الحرف الثاني = 5

عدد طرق اختيار الحرف الثالث = 4

عدد طرق اختيار الحرف الرابع = 3

∴ عدد الكلمات = $6 \times 5 \times 4 \times 3$

$= 360$

مثال 4

بكم طريقة يمكن تكوين عدد رمزه مكون من اربعة مراتب يمكن تكوينه من مجموعة الارقام $\{1,2,4,6,7,8,9\}$ عندما (أ) التكرار مسموح؟ (ب) التكرار غير مسموح؟

الحل

(a) التكرار مسموح

عدد طرق الاختيارات رقم الاحاد = 7

عدد طرق الاختيارات رقم العشرات=7

عدد طرق الاختيارات رقم المئات=7

عدد طرق الاختيارات رقم الالوف=7

∴ عدد الطرق الكلي = $7 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 2401$

(b) التكرار غير مسموح

عدد طرق الاختيارات رقم الاحاد = 7

عدد طرق الاختيارات رقم العشرات = 6

عدد طرق الاختيارات رقم المئات = 5

عدد طرق الاختيارات رقم الالوف = 4

∴ عدد الطرق = $7 \times 6 \times 5 \times 4$

$= 840$

مثال 5

اذا كان لدى فتاة (6) قمصان مختلفة الالوان و (7) تنورات مختلفة الالوان ايضاً و (4) احذية مختلفة فبكم زي مختلف مكون من قميص وتنورة وحذاء يمكن ان تظهر به الفتاة؟

الحل

عدد طرق اختيار القميص الواحد = 6

عدد طرق اختيار التنورة الواحدة = 7

عدد طرق اختيار الحذاء الواحد = 4

∴ عدد الأزياء التي تظهر بها الفتاة = $6 \times 7 \times 4$

$= 168$

مثال 6

بكم طريقة يمكن تكوين عدداً رمزه من (3) ارقام واقل من (500) يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1,2,3,4,5,6,7 اذا كان: (أ) يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه؟

(ب) لايسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه؟

الحل

من الواضح ان العدد الذي رمزه مكون من ثلاثة ارقام يحتوي على رقم احاد ورقم عشرات ورقم مئات وعندما يكون العدد اقل من (500) فان رقم مئاته اصغر من (5) وعليه يكون الحل:

(a) في حالة السماح بتكرار الرقم في العدد نفسه

عدد طرق اختيارات رقم المئات = 4 (لاحظ الارقام في المثال)

عدد طرق اختيارات رقم العشرات = 7

عدد طرق اختيارات رقم الاحاد = 7

∴ عدد الاعداد = $4 \times 7 \times 7$

= 196 عدداً

(b) في حالة عدم السماح بتكرار الرقم في العدد نفسه

عدد طرق اختيارات رقم المئات = 4

عدد طرق اختيارات رقم العشرات = 6

عدد طرق اختيارات رقم الاحاد = 5

∴ عدد الاعداد = $4 \times 6 \times 5$

= 120 عدداً

مثال 7

كم عدداً مكون رمزه من ثلاثة مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1,2,3,4,5,6,7 بحيث

(a) يكون العدد زوجياً وتكرار الرقم في العدد غير مسموح به ؟

(b) يكون فردياً وتكرار الرقم في العدد مسموح به؟

الحل

(a) العدد الزوجي يكون احاده عدداً زوجياً والتكرار غير مسموح به وعليه يكون

عدد طرق الاختيار رقم الاحاد = 3

عدد طرق الاختيار رقم العشرات = 6 لماذا؟

عدد طرق الاختيار رقم المئات = 5

∴ عدد الاعداد = $5 \times 6 \times 3$

= 90 عدداً

(b) العدد الفردي يكون احاده عدداً فردياً والتكرار مسموح به وعليه يكون

عدد طرق الاختيار رقم الاحاد = 4

عدد طرق الاختيار رقم العشرات = 7 لماذا؟

عدد طرق الاختيار رقم المئات = 7

عدد الاعداد = $7 \times 7 \times 4$

= 196 عدداً

مثال (6 – 1)

بكم طريقة يمكن أن يختار طالب مقررين الأول للإحصاء والثاني للرياضيات إذا كان يوجد بقسم الإحصاء 5 مقررات تناسب هذا الطالب وبقسم الرياضيات 3 مقررات تناسبه أيضاً .

الحـــل

عدد طرق اختيار الطالب لمقرر من الإحصاء = 5 طرق .

عدد طرق اختيار الطالب لمقرر من الرياضيات = 3 طرق .

عدد طرق اختيار الطالب لمقررين الأول من الإحصاء والثاني من الرياضيات

$= 5 \times 3 = 15$ طريقة

مثال (6 – 2)

عند القيام بدراسة طبية صنفنا المريض طبقاً لنوع فصيلة الدم وهي A, B, AB, O وكذلك بالنسبة لضغط الدم وهو مرتفع ، معتدل ، منخفض . فبكم طريقة يتم تصنيف المريض من حيث فصيلة الدم وضغط الدم معاً ؟

الحـــل

عدد طرق تصنيف فصائل الدم = 4 طرق .

عدد طرق تصنيف أنواع ضغط الدم = 3 طرق .

عدد طرق تصنيف المريض بالنسبة لفصيلة الدم وضغط الدم معاً

$= 4 \times 3 = 12$ طريقة

مثال (6 – 5)

بكم طريقة يمكن أن يختار طالب مقرراً واحداً من الإحصاء أو الرياضيات . إذا كان يوجد بقسم الإحصاء 3 مقررات تناسب هذا الطالب وبقسم الرياضيات 4 مقررات تناسبه أيضاً .

الحـــل

عدد طرق اختيار الطالب لمقرر من الإحصاء = 3 طرق .

عدد طرق اختيار الطالب لمقرر من الرياضيات = 4 طرق .

عدد طرق اختيار الطالب لمقرر واحد من الإحصاء أو من الرياضيات

$= 3 + 4 = 7$ طرق .

مثال 1

يوجد لدى صاحب مخزن ثلاثة انواع من الدراجات الهوائية ومن كل نوع يوجد أربعة احجام ومن كل حجم يوجد ست دراجات فما عدد الدراجات؟

الحل:

عدد الدراجات $= 3 \times 4 \times 6$

$= 72$ **دراجة**

مثال 2

كم عدد رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه من مجموعة الارقام :

$\{1 , 2 , 5 , 7 , 8 , 9\}$

أ. التكرار مسموح

ب. التكرار غير مسموح

الحل:

أ. التكرار مسموح

عدد اختيارات الرقم الاول = 6

عدد اختيارات الرقم الثاني = 6

عدد اختيارات الرقم الثالث = 6

عدد الاعداد = $6 \times 6 \times 6 = 216$

ب. التكرار غير مسموح

عدد اختيارات الرقم الاول = 6

عدد اختيارات الرقم الثاني = 5

عدد اختيارات الرقم الثالث = 4

عدد الاعداد = $6 \times 5 \times 4 = 120$

مثال 3

كم عدد رمزه مكون من رقمين وأصغر من (40) يمكن تكوينه باستخدام الارقام :

$\{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$

أ. تكرار الرقم مسموح في العدد نفسه

ب. تكرار الرقم غير مسموح في العدد نفسه

الحل :

أ. عدد اختيارات رقم العشرات = 3

عدد اختيارات رقم الاحاد = 5

عدد الاعداد = $3 \times 5 = 15$

ب. عدد اختيارات رقم العشرات = 3

عدد اختيارات رقم الاحاد = 4

عدد الاعداد = $4 \times 3 = 12$

مثال 4

كم عدد رمزه مكون ثلاثة مراتب واكبر من 500 يمكن تكوينه من الارقام

$\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7\}$

أ. تكرار الرقم مسموح

ب. تكرار الرقم غير مسموح

الحل :

أ. عدد اختيارات رقم المئات = 3

عدد اختيارات رقم العشرات = 7

عدد اختيارات رقم الاحاد = 7

عدد الاعداد = $3 \times 7 \times 7 = 147$

ب. عدد اختيارات رقم المئات = 3

عدد اختيارات رقم العشرات = 6

عدد اختيارات رقم الاحاد = 5

عدد الاعداد = $3 \times 6 \times 5 = 90$

مثال :ـ

اعلنت شركة الصناعات الالكترونية العراقية عن وجود اربعة اشكال من التلفزيونات ، ومن كل شكل توجد ثلاثة احجام ومن كل حجم يوجد خمسة تلفزيونات فما عدد التلفزيونات لديها .

الحل :ـ

عدد التلفزيونات = ٤ × ٣ × ٥ = ٦٠ تلفزيوناً

مثال :ـ

أعلن احمد ، احد بائعي البدلات الرجالية أن لديه اكبر تشكيلة من البدلات حيث يوجد في محله (٥) موديلات ومن كل موديل يوجد (٩) قياسات مختلفة ومن كل قياس يوجد (٦) الوان مختلفة فما عدد البدلات الموجودة في المحل .

الحل :ـ

عدد البدلات = ٥ × ٩ × ٦ = ٢٧٠ بدلة

مثال :ـ

اذا كان لدينا الارقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ فكم عدداً رمزه مكون من رقمين يمكن الحصول عليه عندما : « أ » يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه « ب » لا يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه .

« أ » عندما يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه .

الحل :ـ

من الواضح أن : عدد اختيارات الرقم الاول = ٥

، عدد اختيارات الرقم الثاني = ٥

عدد الاعداد في هذه الحالة = ٥ × ٥ = ٢٥ عدداً

« ب » عندما لا يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه .

من الواضح أن : عدد اختيارات الرقم الاول = ٥

عدد اختيارات الرقم الثاني = ٤

عدد الاعداد في هذه الحالة = ٥ × ٤ = ٢٠ عدداً .

مثال :ـ

كم عدداً رمزه مكون من (٣) مراتب واقل من (٤٠٠) يمكن تكوينه باستخدام الارقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ اذا كان تكرار الرقم في العدد نفسه غير مسموح به .

الحل :ـ

عدد اختيارات رقم المئات = ٢

عدد اختيارات رقم العشرات = ٥

عدد اختيارات رقم الاحاد = ٤

عدد الاعداد = ٢ × ٥ × ٤ = ٤٠ عدداً

تمارين (1-1)

1- لدى احمد (5) سترات مختلفة (6) بنطلونات مختلفة (8) قمصان مختلفة فبكم زي مختلف يظهر به احمد مكون من سترة وبنطلون وقميص ؟

الحل :ـ

عدد الأزياء $= (5)(6)(8) = 240$

2- اذا كان لدينا الحروف أ- ل - ع - ق - ك - ب . كم كلمة مكونة من اربعة احرف (بمعنى او بدون معنى)

من هذه الحروف على انه لايسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة ؟

الحل :ـ

عدد طرق اختيار الحرف الاول = 6

عدد طرق اختيار الحرف الثاني = 5

عدد طرق اختيار الحرف الثالث = 4

عدد طرق اختيار الحرف الرابع = 3

∴ عدد الكلمات = $6\times5\times4\times3$

= 360

3- بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث اشخاص من بين عشرة اشخاص لشغل ثلاثة وظائف معينة مختلفة؟

الحل :ـ

عدد طرق اختيار الشخص الأول = ١٠

عدد طرق اختيار الشخص الثاني = ٩

عدد طرق اختيار الشخص الثالث = ٨

عدد الطرق = (١٠)(٩)(٨) = ٧٢٠ طريقة

4- كم عدداً مكون رمزه من ثلاثة ارقام يمكن تكوينه باستخدام الارقام 3,4,5,6,7,8,9

a) على ان يكون العدد فردياً والتكرار غير مسموح به للرقم في العدد نفسه.

b) على ان يكون العدد زوجياً والتكرار مسموح به للرقم في العدد نفسه.

الحل :ـ

عدد طرق اختيار الآحاد = ٤

عدد طرق اختيار العشرات = ٦

عدد طرق اختيار المئات = ٥

عدد الأعداد = (٤)(٦)(٥) = ١٢٠ عدد

(b

عدد طرق اختيار الآحاد = ٣

عدد طرق اختيار العشرات = ٧

عدد طرق اختيار المئات = ٧

عدد الأعداد = (٣)(٧)(٧) = ١٤٧ عدد

5- كم عدداً يكون رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1,2,3,4,5,6,7

a) على ان يكون العدد اكبر من (500) والتكرار مسموح به للرقم في العدد نفسه؟

b) على ان يكون العدد اصغر من (400) والتكرار غير مسموح به للرقم في العدد نفسه؟

الحل :ـ

عدد اختيارات رقم المئات = 3

عدد اختيارات رقم العشرات = 7

عدد اختيارات رقم الاحاد = 7

عدد الاعداد = $3\times7\times7$ = 147

b) عدد طرق اختيار المئات = ٣

عدد طرق اختيار العشرات = ٦

عدد طرق اختيار الآحاد = ٥

عدد الأعداد = (٣)(٦)(٥) = ٩٠ عدد

[1-2] مضروب العدد Factorial

$$\lfloor n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots 1$$

من التعريف $1! = 1$

علماً ان $0! = 1$

فمثلاً :

$$6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$$

$$10! = 10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 3628800$$

مثال 1 اكتب بابسط صورة $\frac{8!}{6!}$ او $\frac{\lfloor 8}{\lfloor 6}$

الحل

$$\frac{\lfloor 8}{\lfloor 6} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= 8\times7 = 56$$

مثال 2 جد $9!$

الحل يمكن القول أنه :

$$9! = 9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$$

$$9! = 9\times8!$$

أو $9! = 9\times8\times7!$

أو $9! = 9\times8\times7\times6!$

وهكذا وبصورة عامة يمكن القول أنه :

$$n! = n(n-1)!$$

أو $n! = n(n-1)(n-2)!$

وهكذا

$$\therefore 9! = 362880$$

مثال 3 اذا كان $\frac{n!}{(n-2)!} = 6$ فما قيمة n؟

الحل

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 6$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 6$$

$$n(n-1) = 6$$

$$n^2 - n - 6 = 0$$

$$(n+2)(n-3) = 0$$

$n = -2$ يهمل لأنه سالب

الجواب : $n = 3$

مثال 4 اذا كان $n! = 720$ فما قيمة n؟

الحل تكتب 720 بشكل حاصل ضرب اعداد متتالية مبتدئة من العدد 1 وذلك بالشكل :

720	1
720	2
360	3
120	4
30	5
6	6
1	

فيكون :

$$720 = 1\times2\times3\times4\times5\times6$$

$$= 6!$$

$$n! = 720$$

$$n! = 6!$$

$$n = 6$$

مثال :ـ

اذا كان $30 = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ جد قيمة (n)

الحل :ـ

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30 \quad \therefore \quad \frac{(n+1)\,n\,(n-1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$(n+1)\,n = 30$$

$$n^2 + n - 30 = 0$$

$$(n-5)(n+6) = 0$$

$\therefore n = 5 \quad , \quad n = -6$ يهمل لان n يجب ان تكون عدد صحيح موجب

مثال :ـ

اذا كان $n! = 5040$ فما قيمة (n)

الحل :ـ

1	5040
2	5040
3	2520
4	840
5	210
6	42
7	7
	1

$$n! = 5040$$

$$\therefore n! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$n! = 7!$$

$$\therefore n = 7$$

[1-3] التباديل permutations

التباديل (permutation)

يسمى وضع (n) من الاشياء في ترتيب معين بانه تبديل لهذه الاشياء (بشرط ان تأخذ جميع هذه الاشياء) وتقرأ تبديل (n) مأخوذ منه (r) ويرمز للتباديل

p^n_r او $p(n\,,\,r)$

والقانون هو

$$P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال 2 أحسب كلاً مما يأتي: $p^{10}_0 \;,\; p^4_4 \;,\; p^6_3$

الحل

a) $p^6_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

b) $p^4_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

c) $p^{10}_0 = 1$

مثال 3

ما عدد طرق توزيع (5) اشخاص على (5) وظائف مختلفة بحيث لكل واحد منهم وظيفة واحدة؟

الحل عدد الطرق يكون

$$p^5_5 = 5!$$

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

مثال (6 – 7)

أوجد قيم !5 و ${}^5P_2$ و ${}^6P_3$

الحـــل

$${}^6P_3 = 6 \times 5 \times 4$$
$${}^5P_2 = 5 \times 4 = 20$$
$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

مثال (6 – 9)

بكم طريقة يمكن أن يجلس ثلاثة أشخاص على ثلاثة مقاعد في صف واحد ؟

الحـــل

المقعد الأول يمكن أن يملأ بثلاثة أشخاص والثاني يمكن أن يملأ بشخصين والثالث يملأ بشخص واحد .

عدد طرق جلوس الأشخاص الثلاثة = $3 \times 2 \times 1 = 6$ طرق .

ويمكن الحصول على النتيجة نفسها باستخدام ${}^nP_n$ حيث $n = 3$ فيكون عدد طرق جلوس الأشخاص الثلاثة = ${}^3P_3$

$= 3!$

$= 3 \times 2 \times 1 = 6$ طرق .

مثال :ــ

احسب p_3^8

$p_3^8 = 8 \times 7 \times 6 = 336$

احسب p_0^5

$p_0^5 = 1$

مثال :ــ

جد عدد التباديل للحروف أ ، ب ، جـ المأخوذة منها أثنين في كل مرة

الحل :

$p_2^3 = 3 \times 2 = 6$

مثال :ــ

ما عدد طرق توزيع (4) اشخاص على (4) وظائف شاغرة بحيث كل شخص له فرصة عمل متساوية مع الآخرين ؟

الحل :

عدد الطرق $p_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

مثال :ــ

بكم طريقة يمكن لمجموعة من سبعة اشخاص في حفل ان يرتبوا انفسهم بحيث يجلسون في صف مستقيم به سبعة مقاعد ؟

الحل :

عدد الطرق $p_7^7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

مثال :ــ

جد قيمة (n) اذا كان $p_2^n = 90$

الحل :

$$p_2^n = 90$$
$$n(n-1) = 90$$
$$n^2 - n - 90 = 0$$
$$(n-10)(n+9) = 0$$
$$\Rightarrow n = 10 \ , \ n = -9$$ يهمل

مثال :ــ

جد قيمة n اذا كان $p_2^n = 42$

الحل :ــ

$$P^n_2 = 42$$
$$n(n-1) = 42$$
$$n^2 - n - 42 = 0$$
$$(n-7)(n+6) = 0$$
$$n = 7$$
$n = -6$ يهمل لانه سالب

ملاحظة :

اذا كان $P^n_r = P^n_k$ فإن $r = k$

مثال 8 كم كلمة يمكن تكوينها مكونة من اربعة حروف مختلفة مأخوذة من الاحرف أ ، ب ، جـ ، د ، هـ؟

الحل عدد الكلمات يكون P^5_4

$$P^5_4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5\times4\times3\times2}{1!} = 120$$ كلمة

تمارين (1-2)

1- احسب قيمة كل مما يأتي :

a) $\frac{7!}{5!}$

b) $\frac{\lfloor 10}{\lfloor 6} - \frac{\lfloor 9}{\lfloor 5}$

2- جد قيمة n اذا كان :

a) $n! = 5040$

b) $P^n_2 = 72$

c) $P^n_5 = 8\times P^n_4$

d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$

3- اذا كانت لدينا المجموعة $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ فكم عدداً يمكن تكوينه اذا كان :

a) رمزه مكون من ثلاثة ارقام بدون تكرار الرقم في العدد نفسه؟

b) رمزه مكون من ثلاثة ارقام ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه؟

c) رمزه مكون من ثلاثة ارقام اصغر من (400) بدون تكرار الرقم في العدد نفسه؟

d) رمزه مكون من ثلاثة ارقام اكبر من (200) ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه؟

e) رمزه مكون من ثلاثة ارقام ويكون زوجياً بدون تكرار الرقم في العدد نفسه؟

f) رمزه مكون من ثلاثة ارقام ويكون فردياً ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه؟

4- يُجرى في احد الصفوف انتخاباً على ثلاثة مراكز في احدى لجان الصف هي الرئيس ونائب الرئيس وامين السر ما عدد النتائج التي تسفر عنها الانتخابات اذا علم ان عدد الطلاب المشاركين في الانتخابات عشرة طلاب؟

5- كم كلمة مختلفة الحروف مكونة من ثلاثة حروف من بين حروف كلمة (ذي قار)؟

6- بكم طريقة يمكن أن يجلس خمسة طلاب في صف من ثمانية كراسي؟

1- احسب قيمة كل مما يأتي :

a) $\frac{7!}{5!}$ b) $\frac{\lfloor 10}{\lfloor 6} - \frac{\lfloor 9}{\lfloor 5}$

$$a)\frac{7!}{5!} = \frac{7\times 6\times 5!}{5!} = 7\times 6 = 42.......$$

$$b)\frac{10!}{6!} - \frac{9!}{5!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6!}{6!} - \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{5!} = 5040 - 3024 = 2016$$

2- جد قيمة n اذا كان :

a) $n! = 5040$

b) $p_2^n = 72$

c) $p_5^n = 8\times p_4^n$

d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$

الحل :-

5040	1
5040	2
2520	3
840	4
210	5
42	6
7	7
1	

$n! = 5040$

$\therefore n! = 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$

$n! = 7!$

$\therefore n = 7$

$$b)..p_2^n = 72 \Rightarrow n(n-1) = 72 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+8) = 0$$

$$\Rightarrow n = 9.....,\ n = -8 \notin N$$

$$c)..p_5^n = 8\times p_4^n$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 8\times n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$(n-4) = 8 \Rightarrow n = 8+4 \Rightarrow n = 12$$

$$d)..\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30 \Rightarrow \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = 30 \Rightarrow (n+1)(n) = 30 \Rightarrow$$

$$n^2 + n - 30 = 0 \Rightarrow (n+6)(n-5) = 0 \Rightarrow n = -6 \notin N....,\ n = 5$$

إعداد
إبراهيم عبد الله فرج
07701734569
نينوى \ القيارة \ قرية الزاوية

3- اذا كانت لدينا المجموعة $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ فكم عدداً يمكن تكوينه اذا كان :

a) رمزه مكون من ثلاثة ارقام بدون تكرار الرقم في العدد نفسه؟

b) رمزه مكون من ثلاثة ارقام ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه؟

c) رمزه مكون من ثلاثة ارقام اصغر من (400) بدون تكرار الرقم في العدد نفسه؟

d) رمزه مكون من ثلاثة ارقام اكبر من (200) ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه؟

e) رمزه مكون من ثلاثة ارقام ويكون زوجياً بدون تكرار الرقم في العدد نفسه؟

f) رمزه مكون من ثلاثة ارقام ويكون فردياً ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه؟

الحل :ـ

a) عدد طرق اختيار المئات = 7
عدد طرق اختيار العشرات = ٦
عدد طرق اختيار الآحاد = ٥
عدد الأعداد = (7)(٦)(٥) = 210 عدد

b) عدد طرق اختيار المئات = ٧
عدد طرق اختيار العشرات = ٧
عدد طرق اختيار الآحاد = ٧
عدد الأعداد = (٧)(٧)(٧) = ٣٤٣ عدد

c) عدد طرق اختيار المئات = ٣
عدد طرق اختيار العشرات = ٦
عدد طرق اختيار الآحاد = ٥
عدد الأعداد = (٣)(٦)(٥) = ٩٠ عدد

d) عدد طرق اختيار المئات = ٦
عدد طرق اختيار العشرات = ٧
عدد طرق اختيار الآحاد = ٧
عدد الأعداد = (٦)(٧)(٧) = ٢٩٤ عدد

e) عدد طرق اختيار الآحاد = ٣
عدد طرق اختيار العشرات = 6
عدد طرق اختيار المئات = 5
عدد الأعداد = (٣)(6)(5) = 90 عدد

f) عدد طرق اختيار الآحاد = 4
عدد طرق اختيار العشرات = ٧
عدد طرق اختيار المئات = ٧
عدد الأعداد = (4)(٧)(٧) = 196 عدد

4- يُجرى في احد الصفوف انتخاباً على ثلاثة مراكز في احدى لجان الصف هي الرئيس ونائب الرئيس وامين السر ما عدد النتائج التي تسفر عنها الانتخابات اذا علم ان عدد الطلاب المشاركين في الانتخابات عشرة طلاب؟

الحل :ـ

عدد طرف اختيار الرئيس = ١٠
عدد طرق اختيار نائب الرئيس = ٩
عدد طرق اختيار أمين السر = ٨
عدد النتائج = (١٠)(٩)(٨) = ٧٢٠ طريقة
أو يمكن حل السؤال بطريقة

$$p_3^{10} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

5- كم كلمة مختلفة الحروف مكونة من ثلاثة حروف من بين حروف كلمة (ذي قار)؟

الحل :ـ

عدد طرق اختيار الحرف الأول = ٥

عدد طرق اختيار الحرف الثاني = ٤

عدد طرق اختيار الحرف الثالث = ٣

عدد الكلمات = (٥)(٤)(٣) = ٦٠ كلمة

أو يمكن حل السؤال بطريقة

$$p_3^5 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

6- بكم طريقة يمكن أن يجلس خمسة طلاب في صف من ثمانية كراسي؟

عدد طرق اختيار الشخص الأول = ٨

عدد طرق اختيار الشخص الثاني = ٧

عدد طرق اختيار الشخص الثالث =٦

عدد طرق اختيار الشخص الرابع = ٥

عدد طرق اختيار الشخص الخامس = ٤

عدد الطرق = (٨)(٧)(٦)(٥)(٤) = ٦٧٢٠ طريقة

أو يمكن حل السؤال بطريقة

$$p_5^8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$$

[9-3] التوافيق Combination

هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الاشياء مأخوذة كلها أو بعضها بصرف النظر عن ترتيبها ويرمز لها

$$C^n_r = \binom{n}{r} = C(n, r)$$

[9-3-1] قوانين التوافيق

1. $C^n_r = \dfrac{P^n_r}{r!}$

2. $C^n_r = \dfrac{n!}{(n-r)! \times r!}$

3. $C^n_r = C^n_{n-r}$

4. $C^n_n = C^n_0 = 1$

مثال 1

أحسب كل من

1. $C_2^5 = \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ حسب القانون الاول

2. $C_3^8 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

مثال 2

كم لجنة ثلاثية يمكن تكوينها من (6) أشخاص

الحل:

$$C_3^6 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

مثال 3

اذا كان عدد أسئلة أمتحان مادة الرياضيات هو (8) أسئلة المطلوب حل(5) أسئلة فقط. بكم طريقة يمكن الأجابة.

الحل:

$$C_5^8 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$$

مثال 4

بكم طريقة يمكن اختبار لجنة من ثلاثة رجال وسيدتين من بين (7) رجال و (5) سيدات.

الحل:

يمكن اختيار ثلاثة رجال من بين سبعة رجال بطرق عددها C_3^7 ويمكن اختيار السيدتين من بين خمسة سيدات بطرق عددها C_2^5 أذن اختيار اللجنة بطرق عددها

$$C_3^7 \times C_2^5 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 350$$

مثال 5

كيس فيه (10) كرات حمراء و (6) كرات بيضاء سحبت منه (4) كرات معاً دون أرجاع. ما عدد الطرق التي تكون فيها الكرات المسحوبة من نفس اللون.

الحل:

$$C_4^{10} + C_4^6 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

عدد الطرق $= 210 + 15 = 225$

مثال 6

اثبت ان :

$$\binom{70}{3} = \binom{70}{67}$$

الحل: حسب القانون الثالث

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\therefore \binom{70}{3} = \binom{70}{70-3}$$

$$= \binom{70}{67}$$

مثال 7

جد قيمة (n) اذا كان $C_2^n = 55$

الحل:

$$C_2^n = \frac{n\,(n-1)}{2\times 1}$$

$$\therefore \frac{n\,(n-1)}{2} = 55$$

$$n\,(n-1) = 110$$

$$n^2 - n - 110 = 0$$

$$(n - 11)\,(n + 10) = 0$$

$\Rightarrow n = 11 \quad , \quad n = -10$ يهمل

مثال 1

اذا كان لدينا المجموعة $X = \{1 , 2 , 3\}$ كم مجموعة جزئية للمجموعة X مكونة من عنصرين؟

الحل نلاحظ أن المجموعات الجزئية من X والمكونة من عنصرين هي :

$$\{1 , 2\} ، \{1 , 3\} ، \{2 , 3\}$$

مثال 2

احسب : C_5^{13} ، C_0^{10} ، C_{20}^{20}

الحل

a) $C_5^{13} = \binom{13}{5} = \dfrac{P_5^{13}}{5!} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = \dfrac{13!}{5!\,(13-5)!}$

$$= \frac{13\times12\times11\times10\times9\times\cancel{8!}}{5\times4\times3\times2\times\cancel{8!}} = 1287$$

b) $C_0^{10} = \binom{10}{0} = 1$

c) $C_{20}^{20} = \binom{20}{20} = 1$

مثال 3 جد قيمة كلاً من C^{15}_{12} ، C^{15}_{3} ثم لاحظ الناتجين .

الحل

$$C^{15}_{12} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{15!}{12! \times (15-12)!} = \frac{15\times14\times13\times12!}{12!\times3!} = 455$$

$$C^{15}_{3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15!}{3!\times12!} = 455$$

مثال 4 اذا كان عدد الاسئلة في الورقة الامتحانية (8) اسئلة والمطلوب الاجابة على (6) منها فبكم طريقة يمكن الاجابة؟

الحل

الترتيب غير ضروري في الاجابة على الاسئلة الامتحانية لذا فإن :

عدد الطرق $= C^{8}_{6}$

$$C^{8}_{6} = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{8\times7\times6!}{6!\times2!}$$

$$= \frac{8\times7}{2\times1} = 28$$ طريقة

مثال 5 كم قطعة مستقيم يمكن تحديدها بنقاط من مجموعة فيها (6) نقاط و لا توجد ثلاث منها على استقامة واحدة؟

الحل

عدد القطع المستقيمة يكون :

$$C^{6}_{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6\times5\times4!}{2\times1\times4!} = 15$$

مثال 6 جد قيمة n اذا كان $2\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$

الحل

$$2\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

$$2 \times \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n+1)!}{3!(n+1-3)!}$$

$$2 \times \frac{n!}{2\times1\times(n-2)!} = \frac{(n+1)\times n!}{3\times2\times1(n-2)!}$$

$$1 = \frac{n+1}{6} \Rightarrow n+1 = 6$$

$$n = 5$$

مثال 7 بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من (5) طالبات ، (7) طلاب من بين مجموعة مكونة من (8) طالبات، (10) طلاب؟

الحل في اللجنة المطلوبة (5) طالبات يمكن اختيارهن من بين (8) طالبات وعليه يكون :

عدد طرق اختيار الطالبات = C^8_5

$$C^8_5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!\times3!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2} = 56 \text{ طريقة}$$

و 7 طلاب يُختارون من بين (10) طلاب فيكون:

عدد طرق اختيار الطلاب = C^{10}_7

$$C^{10}_7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{7!\times3!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120 \text{ طريقة}$$

وباستخدام مبدأ العد الاساسي يكون :

عدد طرق تكوين اللجنة = 56×120

$= 6720$

مثال 8 صندوق يحتوي على (6) كرات حمراء , (4) كرات بيضاء يراد سحب (اختيار) (5) كرات بشرط أن تكون (3) كرات حمراء فقط بكم طريقة يمكن اجراء السحب ؟

الحل

عدد طرق سحب (3) كرات حمراء = C^6_3

$$C^6_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!\times3\times2\times1} = 20 \text{ طريقة}$$

عدد طرق سحب كرتين بيضاء = C^4_2

$$C^4_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2!\times2\times1} = 6 \text{ طرق}$$

عدد الطرق الممكنة $= 6\times20 = 120$

مثال :ـ

اذا كان عدد اسئلـة امتحان ما هو ٨ وكان المطلـوب حل خمسة اسئلة منها فقط بشرط ان تكون ثلاثة منها من الاسئلة الاربعة الاولى . فبكم طريقة يمكن الاجابة؟

الحل :ـ

ن$_1$ = عدد التوفيقات لحل ثلاثة اسئلة من الاربعة الاولى = ق$^{٤}_{٣}$

$= \frac{!٤}{!١ \; !٣} = ٤$

ن$_2$ = عدد التوفيقات لحل سؤالين من الاربعةالثانية = ق$^{٤}_{٢}$

$= \frac{!٤}{!٢ \; !٢} = ٦$

اذن عـدد الطـرق لحل خمسـة اسئلـة بشرط ان تكون ثـلاثـة منهـا من الاسئلـة الاربعـة الاولى

= ن$_1$ × ن$_2$

= ٤ × ٦ = ٢٤ طريقة

تمارين (1-3)

1- جد قيمة كلاً من :

a) C_5^{11} b) $C(18,18)$ c) $\binom{7}{0}$ d) $\frac{1}{210}[P_3^7 + P_4^7]$

2- جد قيمة n إذا كان :

$$C_{20}^n = C_{35}^n$$

3- اي العبارات الاتية صائبة واي منها خاطئة؟

a) $C_6^{16} = C_4^{10}$

b) $C_{23}^{25} = \frac{P_2^{25}}{2!}$

c) اذا كان $\binom{n}{6} = \binom{n}{4}$ فإن $n = 10$

d) عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على ثلاثة عناصر التي يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصره عشرة هو C_3^{10} .

e) سبعة اشخاص ليسوا متمايزين يكون عدد طرق اختيار ثلاثة منهم هو P_3^7 .

f) عدد طرق اختيار شخصين من بين ستة اشخاص دون مراعاة الترتيب عند الاختيار = 15 طريقة.

g) $P_0^3 - 2\lfloor\underline{0} = -1$

h) لكل $n, r \in N$ اذا كان $P_n^5 = P_r^5$ فإن $n = r$

1- جد قيمة كلاً من :

a) C_5^{11} b) $C(18,18)$ c) $\binom{7}{0}$ d) $\frac{1}{210}[P_3^7 + P_4^7]$

$$a).C_5^{11} = \frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1} = 642.....b).C(18,18) = 1......c).\binom{7}{0} = 1$$

$$d).\frac{1}{210}[P_3^7 + P_4^7] = \frac{1}{210}[7\times6\times5 + 7\times6\times5\times4] = \frac{1}{210}[210 + 210\times4]$$

$$= \frac{210}{210} + \frac{210\times4}{210} = 1 + 4 = 5$$

2- جد قيمة n إذا كان :

$$C_{20}^{n} = C_{35}^{n}$$

الحل : - $C_r^n = C_{n-r}^n \Rightarrow n - 20 = 35 \Rightarrow n = 35 + 20 \Rightarrow n = 55$

3- اي العبارات الاتية صائبة واي منها خاطئة ؟

a) $C_6^{16} = C_4^{10}$

b) $C_{23}^{25} = \dfrac{P_2^{25}}{2!}$

c) اذا كان $\binom{n}{4} = \binom{n}{6}$ فإن $n = 10$

d) عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على ثلاثة عناصر التي يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصره عشرة هو C_3^{10} .

e) سبعة اشخاص ليسوا متمايزين يكون عدد طرق اختيار ثلاثة منهم هو P_3^7.

f) عدد طرق اختيار شخصين من بين ستة اشخاص دون مراعاة الترتيب عند الاختيار = 15 طريقة.

g) $P_0^3 - 2\,\underline{\lfloor 0} = -1$

h) لكل $n , r \in N$ اذا كان $P_n^5 = P_r^5$ فإن $n = r$

$$a), C_6^{16} = C_4^{10} \Rightarrow C_6^{16} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 4 \times 14 \times 13 \times 11 = 8008$$

$$C_4^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 7 = 210 \ldots\ldots \therefore C_6^{16} \neq C_4^{10}$$

أي أن العبارة صائبة

$b).C_{23}^{25} = C_2^{25} = \dfrac{P_2^{25}}{2!}$ أي أن العبارة صائبة

$$c).C_4^n = C_6^n \Rightarrow n - 4 = 6 \Rightarrow n = 6 + 4 \Rightarrow n = 10$$

أي أن العبارة صائبة

d) أي أن العبارة صائبة

e) أي أن العبارة صائبة

$f).C_2^6 = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ أي أن العبارة صائبة

$g).P_0^3 - 2 \times 0! = 1 - 2 \times 1 = -1$ أي أن العبارة صائبة

h) أي أن العبارة صائبة

4- اختر الاجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

a) عدد طرق اختيار لجنة ثلاثية من بين (10) اشخاص يساوي :

(1) P_3^{10} (2) C_3^{10} (3) $\frac{10!}{3!}$ (4) ليس اي مما سبق

b) اذا كان (n) عدد المجموعات الجزئية الثنائية التي يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصرها (6) فإن n يساوي:

(1) 15 (2) 6 (3) 4 (4) 2

c) عدد القطع المستقيمة التي يمكن ان تصل بين اي رأسين من رؤوس مضلع سداسي يساوي :

(1) 6×6 (2) C_2^6 (3) P_2^6 (4) $\underline{|6}$

d) $\binom{68}{8} \div C_{60}^{68} =$

(1) 68 (2) $\frac{8}{60}$ (3) 1 (4) $\frac{P_8^{68}}{8}$

e) اذا كان لدينا الارقام 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 فإن عدد الاعداد المكون رمزها من اربعة ارقام مختلفة من بين هذه الارقام هو :

(1) $\underline{|9}$ (2) $\binom{9}{4}$ (3) $\underline{|4}$ (4) ليس اي مما سبق

$a).C_3^{10}$

$b).C_2^6 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$

$c).C_2^6$

$d).C_8^{68} \div C_{60}^{68} = C_{60}^{68} \div C_{60}^{68} = 1$

e) ليس أي مما سبق

5- يراد تشكيل لجنة من ستة اعضاء من بين (5) طلاب ، (8) مدرسين فبكم طريقة يمكن أن تكون اللجنة محتوية على مدرسين اثنين؟

الحل :ـ

عدد طرق اختيار مدرسين اثنين من بين ثمانية مدرسين هو $C_2^8 = \frac{8\times7}{2\times1} = 28$ طريقة

عدد طرق اختيار أربعة طلاب من بين خمسة طلاب هو $C_4^5 = 5$ طريقة

أي أن عدد الطرق هو (٢٨)(٥) = ١٤٠ طريقة

6- صندوق يحتوي على (4) كرات حمراء،(8)كرات بيضاء سحبت ثلاث كرات معاً جد عدد طرق سحب :

1) اثنتان حمراء و واحدة بيضاء .

2) على الاقل اثنتان حمراء .

الحل :ـ

١) عدد الطرق يساوي $48 = 8 \times \dfrac{4 \times 3}{2 \times 1} = C_2^4 \times C_1^8$ طريقة

٢) عدد الطرق يساوي $52 = 4 + 48 = 4 + 8 \times \dfrac{4 \times 3}{2 \times 1} = C_2^4 \times C_1^8 + C_3^4$ طريقة

7- اذا كان عدد اسئلة امتحان مادة ماهو (10) اسئلة وكان المطلوب حل (7) اسئلة منها على أن نختار (4) من الخمسة الاولى ، فبكم طريقة يمكن الاجابة ؟

الحل :-

عدد الطرق يساوي $50 = 5 \times 10 = 5 \times \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} = C_4^5 \times C_3^5$ طريقة

[6-9] نظرية ذات الحدين

نظرية ذات الحدين : هي قانون لايجاد ما يساوي أي مقدار ذي حدين مثل (a+b) إذا رفع الى أي اس بدون إجراء عملية الضرب إذا كان الاس عدداً صحيحاً موجباً.

اذا كان a,b عددين حقيقيين و n عدداً صحيحاً موجباً

1) $(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n$

2) $(a-b)^n = C_0^n a^n - C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n (-b)^n$

نلاحظ ان حدود هذا المفكوك تكون سالبة او موجبة على التعاقب ويكون الحد الاخير موجباً إذا كانت n زوجية وسالبة إذا كانت n فردية .

ملاحظات :

1) عدد حدود المفكوك = n+1
2) أس الحد الاول واس الحد الاخير = n
3) أس الحد الاول +اس الحد الثاني = n
4) أس الحد الاول يبدأ بالتناقص من n الى 0
إس الحد الثاني يتزايد من 0 الى n
5) اذا كان n عدد زوجي فان عدد حدود المفكوك يكون فردي ورتبة الحد الاوسط $\dfrac{n}{2} + 1$
6) اذا كان n عدد فردي فان عدد حدود المفكوك يكون زوجي لذا فان رتبة الحدين الاوسطين

$\dfrac{n+3}{2} , \dfrac{n+1}{2}$ أو $\dfrac{n+1}{2} , \dfrac{n+1}{2} + 1$

مثال 1

اوجد مفكوك $(a+b)^5$

$(a+b)^5 = C_0^n a^5 + C_1^n a^4 b + C_2^n a^3 b^2 + C_3^n a^2 b^3 + C_4^n a b^4 + C_n^n b^5$
$= a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$

مثال 2

اوجد قيمة $(101)^3$

$(101)^3 = (1+100)^3 = 1 + C_1^3 100 + C_2^3 (100)^2 + C_3^3 (100)^3$
$= 1 + 300 + 30\,000 + 1000\,000$
$= 1030301$

اذا كان مفكوك $(A+B)^n$ فان :

قانون الحد العام $P_r = c^n_{r-1} \; a^{n-r+1} \; b^{r-1}$

مثال 3

جد الحد الخامس في مفكوك $(a+b)^{10}$

الحل :

$P_r = c^n_{r-1} \; a^{n-r+1} \; b^{r-1}$

$P_5 = c^{10}_{5-1} \; a^{10-5+1} \; b^{5-1}$

$$= \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} \; a^6 \; b^4$$

$= 210 \; a^6 \; b^4$

مثال 4

برهن إن مفكوك $(x^2+2/x^3)^{10}$ يحتوي على الحد الذي فيه x^{15} ثم جد معامله

الحل :

$P_r = c^n_{r-1} \; a^{n-r+1} \; b^{r-1}$

$P_r = c^{10}_{r-1} \; (x^2)^{10-r+1} \; . \; (2/x^3)^{r-1}$

$x^{15} = (x^2)^{11-r} \; (x^{-3})^{r-1}$

$x^{15} = (x^{22-2r}) \; (x^{-3r+3})$

$x^{15} = x^{25-5r} \Rightarrow 15 = 25-5r \Rightarrow 5r = 10 \Rightarrow r=2$

$P_2 = c^{10}_1 \; (x^2)^{10-2+1} \; .(2/x^3)^{2-1}$

$P_2 = 10(x^{18}) \; (2/x^3) = 20 \; x^{15}$

P_2 معامل

20

مثال 5

اثبت انه لا يوجد حد خالٍ من (x) في مفكوك $(5x - 4/x^2)^{19}$

الحل:

$P_r = c^n_{r-1} \; a^{n-r+1} \; b^{r-1}$

$P_r = c^{19}_{r-1} \; (5x)^{19-r+1} \; . \; (-4/x^2)^{r-1}$

$x^0 = (x)^{20-r} \; (x)^{-2r+2}$

$x^0 = x^{22-3r}$

$0 = 22-3r \Rightarrow r = 22/3 \Rightarrow \notin Z^+$

$\therefore$ لا يوجد حد خالٍ من x

مثال 6

وجد الحدين الاوسطين في مفكوك $(3x/2 - 2/3x)^7$

لحل : رتبتا الحدين الاوسطين هما :

$$\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$\frac{n+3}{2} = \frac{7+3}{2} = 5$$

لحدان الاوسطان هما الرابع والخامس

$P_r = c^n_{r-1} \; a^{n-r+1} \; b^{r-1}$

$P_4 = c^7_3 \; (3x/2)^4 \; (-2/3x)^3$

$$= \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} \left(\frac{81x^4}{16}\right)\left(\frac{-8}{27x^3}\right) = -\frac{105}{2} \; x$$

$P_5 = c^7_4 \; (3x/2)^3 \; (-2/3x)^4$

$$= \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1} \left(\frac{27x^3}{8}\right)\left(\frac{16}{81x^4}\right) = \frac{70}{3x}$$

مثال 8

اختصر المقدار $(2+x)^4 + (2-x)^4$ الى ابسط صورة

الحل :

$(2+x)^4 + (2-x)^4 =$ ضعف الحدود الفردية

في مفكوك $(2+x)^4$

$$= 2\,[P_1+P_3+P_5]$$
$$= 2\,[2^4+c^4_2(2)^2(x)^2+x^4]$$
$$= 2\,[16+24x^2+x^4]$$

مثال 1 جد مفكوك $(x-y)^5$

الحل

$$(x-y)^5 = C^5_0 x^5 - C^5_1 x^4 y + C^5_2\, x^3 y^2 - C^5_3\, x^2 y^3 + C^5_4\, x y^4 - C^5_5\, y^5$$
$$= x^5 - 5x^4 y + 10x^3 y^2 - 10x^2 y^3 + 5xy^4 - y^5$$

مثال 2 جد مفكوك $(3a+b)^4$

الحل

$$(3a+b)^4 = C^4_0 (3a)^4 + C^4_1 (3a)^3 b + C^4_2 (3a)^2 b^2 + C^4_3 (3a) b^3 + C^4_4 b^4$$
$$= 81a^4 + 108a^3 b + 54a^2 b^2 + 12ab^3 + b^4$$

مثال 3 اوجد الحد الخامس في المفكوك $(x-3y)^8$

الحل

$$P_r = C^n_{r-1} x^{n-r+1} (-3y)^{r-1} \quad = C^8_4 x^4 (-3y)^4$$
$$= \frac{8!}{4!\,(8-4)!}\, x^4 (81y^4)$$
$$= 70 \times 81\, x^4 y^4 \quad = 5670\, x^4 y^4$$

مثال 4 جد الحد الاوسط في مفكوك $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^8$

الحل

$\because$ الاس عدد زوجي فيوجد حد اوسط واحد رتبته

$$\frac{n}{2}+1 =$$
$$\frac{8}{2}+1 =$$
$$5 =$$

الحد العام هو : $P_r = C^n_{r-1}\, x^{n-r-1}\, y^{r-1}$

الحد الأوسط هو الحد الخامس $P_5 = C^8_4 \left(\frac{x}{2}\right)^{8-5+1} (3)^{5-1}$

$$= \frac{8!}{4!\;4!} \times \frac{x^4}{16} \times 81 \quad \Rightarrow \quad P_5 = \frac{2835}{8} x^4$$

مثال 5 جد الحدين الاوسطين في مفكوك $\left(\frac{3a}{2}-\frac{2}{3a}\right)^7$

الحل ∵ الاس عدد فردي فيوجد حدان اوسطان رتبتاهما

$$\frac{n+1}{2}=\frac{7+1}{2}=4 \quad , \quad \frac{n+1}{2}+1=4+1=5$$

∴ الحدان الاوسطان هما الرابع والخامس

$$P_4=C^7_3\left(\frac{3a}{2}\right)^4\left(\frac{-2}{3a}\right)^3$$

$$=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times\frac{81a^4}{16}\times\frac{-8}{27a^3}=\frac{-105}{2}a$$

$$P_5=C^7_4\left(\frac{3a}{2}\right)^3\left(\frac{-2}{3a}\right)^4$$

$$=\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}\times\frac{27a^3}{8}\times\frac{16}{81a^4}=\frac{70}{3a}$$

مثال 6 جـد المقدار $(2+a)^4+(2-a)^4$ إلى ابسط صورة ثم جد قيمة المقدار عندما $a=\sqrt{3}$.

الحل

$$(2+a)^4=P_1+\cancel{P_2}+P_3+\cancel{P_4}+P_5$$

$$(2-a)^4=P_1-\cancel{P_2}+P_3-\cancel{P_4}+P_5$$

بالجمع

$$(2+a)^4+(2-a)^4=2(P_1+P_3+P_5)$$

ضعف الحدود الفردية الترتيب في مفكوك $(2+a)^4$

وعندما تكون $a=\sqrt{3}$ تكون قيمة المقدار هي :

$$2[2^4+C^4_2\,2^2\,a^2+a^4]=2[16+24\times3+9]=2\times97=194$$

مثال 7 اختصر المقدار $\left(a+\frac{1}{a}\right)^5-\left(a-\frac{1}{a}\right)^5$ إلى ابسط صورة.

الحل ضعف الحدود الزوجية الترتيب في مفكوك $\left(a+\frac{1}{a}\right)^5$

$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^5-\left(a-\frac{1}{a}\right)^5$$

$$=2(P_2+P_4+P_6)$$

$$=2\left[C^5_1\,a^4\left(\frac{1}{a}\right)+C^5_3\,a^2\left(\frac{1}{a}\right)^3+C^5_5\left(\frac{1}{a}\right)^5\right]=2\left[5a^3+\frac{10}{a}+\frac{1}{a^5}\right]$$

مثال 8 جد الحد الذي يحوي (a^8) في مفكوك $(3+a^2)^8$ ثم جد معامله.

الحل نفرض أن رتبة الحد الذي يحوي a^8 في مفكوك $(3+a^2)^8$ هي (r) فيكون :

$$P_r=C^8_{r-1}\,(3)^{8-r+1}\,(a^2)^{r-1}$$

$$=C^8_{r-1}\,3^{9-r}\,a^{2r-2}$$

$$\therefore a^8=a^{2r-2}$$

$$2r-2=8$$

$$2r=10 \Rightarrow r=5$$

رتبة الحد الذي يحوي a^8 هو الخامس $r=5$

$$P_5=C^8_4\,3^4\,(a^2)^4$$

$$=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\times81\times a^8$$

قيمة الحد $=5670\,a^8$

المعامل $=5670$

مثال 9 جد الحد الخالي من (X) في مفكوك $(X^2 - \frac{1}{X})^{15}$.

الحل نفرض أن رتبة الحد الخالي من X [اي يحوي على X^0] هي (r) فيكون:

$$P_r = C^{n}_{r-1} (X^2)^{n-r+1} (\frac{-1}{X})^{r-1}$$

$$= C^{15}_{r-1} (X)^{2(15-r+1)} (-1)^{r-1} (X^{-1})^{r-1}$$

$$= C^{15}_{r-1} X^{32-2r} (-1)^{r-1} (X)^{-r+1}$$

$$= C^{15}_{r-1} X^{33-3r} (-1)^{r-1}$$

$$\therefore X^{33-3r} = X^0$$

$$33 - 3r = 0$$

$$33 = 3r$$

$$r = 11$$

الحد الخالي من (X) هو الحد الذي رتبته (11) فيكون :

$$P_{11} = C^{15}_{10} (X^2)^{15-11+1} (-1)^{11-1} (X)^{-11+1}$$

$$= C^{15}_{10}$$

$$= \frac{15!}{10! \times 5!}$$

$$= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3003$$ قيمة الحد الخالي من X

مثال 10 جد قيمة $(101)^3$.

الحل

$$(101)^3 = (1+100)^3$$

$$= 1 + C^3_1 (100)^1 + C^3_2 (100)^2 + C^3_3 (100)^3$$

$$= 1 + (3)(100) + (3)(10000) + 1000000$$

$$= 1030301$$

تمارين (4-1)

1- جد مفكوك كل مما يأتي :

a) $(3a - b)^4$

b) $(3x^2 + 2y)^3$

c) $(2x - \frac{1}{2x})^6$

2- جد الحد الثالث في مفكوك $(x - 3y^2)^7$.

3- جد الحد السادس في مفكوك $(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3})^8$.

4- جد الحد الاوسط في مفكوك $(a - \frac{2}{a})^{12}$.

5- جد الحدين الاوسطين في مفكوك $(2a - 1)^7$.

6- جد الحد الذي يحوي على x^4 في مفكوك $(1 + x^2)^6$ ثم جد معامله .

7- جد معامل x^2 في مفكوك $(x^3 + \frac{2}{x^2})^9$.

8- جد الحد الخالي من (x) في مفكوك $(x^2 + \frac{2}{x^3})^{10}$.

9- جد قيمة $(99)^4$ (باستخدام نظرية ذي الحدين) .

10- جد قيمة $(98)^4 - (102)^4$.

11- جد قيمة $(2 - \sqrt{3})^7 + (2 + \sqrt{3})^7$.

1- جد مفكوك كل مما يأتي :

a) $(3a - b)^4$

b) $(3x^2 + 2y)^3$

c) $(2x - \frac{1}{2x})^6$

$$a).(3a-b)^4 = C_0^4(3a)^4 - C_1^4(3a)^3 b + C_2^4(3a)^2 b^2 - C_3^4(3a)b^3 + C_4^4 b^4$$

$$= 81a^4 - 4(27)a^3 b + \frac{4\times 3}{2\times 1}(9a^2)b^2 - 4(3a)b^3 + b^4$$

$$= 81a^4 - 108a^3 b + 54a^2 b^2 - 12ab^3 + b^4$$

$$b).(3x^2+2y)^3 = C_0^3(3x^2)^3 + C_1^3(3x^2)^2(2y) + C_2^3(3x^2)(2y)^2 + C_3^3(2y)^3$$

$$= 27x^6 + 3(9)x^4(2y) + \frac{3\times 2}{2\times 1}(3x^2)(4)y^2 + (8)y^3$$

$$= 27x^6 + 54x^4 y + 36x^2 y^2 + 8y^3$$

$$c) = C_0^6(2x)^6 - C_1^6(2x)^5\frac{1}{2x} + C_2^6(2x)^4(\frac{1}{2x})^2 - C_3^6(2x)^3(\frac{1}{2x})^3 + C_4^6(2x)^2(\frac{1}{2x})^4 - C_5^6(2x)(\frac{1}{2x})^5 + C_6^6(\frac{1}{2x})^6$$

$$= 64x^6 - 6(32x^5)(\frac{1}{2x}) + 15(16x^4)(\frac{1}{4x^2}) - 20(8x^3)(\frac{1}{8x^3}) + 15(4x^2)(\frac{1}{16x^4}) - 6(2x)(\frac{1}{32x^5}) + \frac{1}{64x^6}$$

$$= 64x^6 - 96x^4 + 60x^2 - 20 + \frac{15}{4x^2} - \frac{3}{8x^4} + \frac{1}{64x^6}$$

2- جد الحد الثالث في مفكوك $(x - 3y^2)^7$.

الحل :-

قانون الحد النوني هو $P_r = C^n_{r-1} x^{n-r+1} y^{r-1}$

$$P_3 = C^7_{3-1} x^{7-3+1} (-2y^2)^{3-1} \Rightarrow \frac{7 \times 6}{2 \times 1} x^5 (4y^4) = 84x^5 y^4$$

3- جد الحد السادس في مفكوك $(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3})^8$

$$P_6 = C^8_{6-1} (\frac{x^2}{2})^{8-6+1} (-\frac{x}{3})^{6-1} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} (\frac{x^6}{8})(-\frac{x^5}{243}) = -\frac{7}{243} x^{11}$$

4- جد الحد الاوسط في مفكوك $(a - \frac{2}{a})^{12}$

الحل :-

قانون الحد الأوسط إذا كان الأس زوجي هو $\frac{n}{2}+1$ والحد الأوسط هو $\frac{n}{2}+1 = \frac{12}{2}+1 = 7$

$$P_7 = C^{12}_{7-1} (a)^{12-7+1} (-\frac{2}{a})^{7-1} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} (a^6)(\frac{64}{a^6}) = 59136$$

5- جد الحدين الاوسطين في مفكوك $(2a - 1)^7$.

قانون الحدين الأوسطين $\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}+1$ والحدين هما $\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4,......,5$

$$P_4 = C^7_{4-1} (2a)^{7-4+1} (-1)^{4-1} \Rightarrow \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} (16) a^4 (-1) = -560 a^4$$

$$P_5 = C^7_{5-1} (2a)^{7-5+1} (-1)^{5-1} \Rightarrow \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} (8) a^3 (1) = 280 a^3$$

6- جد الحد الذي يحوي على x^4 في مفكوك $(1 + x^2)^6$ ثم جد معامله

الحل :-

$$P_r = C^n_{r-1} x^{n-r+1} y^{r-1} = C^6_{r-1} (1)^{6-r+1} (x^2)^{r-1} = C^6_{r-1} x^{2r-2} \Rightarrow$$

$$x^4 = x^{2r-2} \Rightarrow 4 = 2r - 2 \Rightarrow 4 + 2 = 2r \Rightarrow 6 = 2r \Rightarrow r = 3 \therefore P_3$$

7- جد معامل x^2 في مفكوك $(x^3 + \frac{2}{x^2})^9$.

الحل :-

$$P_r = C^n_{r-1} x^{n-r+1} y^{r-1} = C^9_{r-1} (x^3)^{9-r+1} (\frac{2}{x^2})^{r-1} = C^9_{r-1} (x^3)^{10-r} (\frac{2^{r-1}}{x^{2r-2}}) \Rightarrow$$

$$x^2 = C^9_{r-1} 2^{r-1} x^{30-3r} x^{-2r+2} \Rightarrow x^2 = x^{32-5r} \Rightarrow 2 = 32 - 5r \Rightarrow -32 + 2 = -5r \Rightarrow$$

$$-30 = -5r \Rightarrow r = 6 \Rightarrow C^9_{6-1} 2^{6-1} = C^9_5 2^5 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 32 = 4032$$

8- جد الحد الخالي من (X) في مفكوك $(X^2+\frac{2}{x^3})^{10}$

الحل : ــ

$$P_r=C_{r-1}^{n}x^{n-r+1}y^{r-1}=C_{r-1}^{10}(x^2)^{10-r+1}(\frac{2}{x^3})^{r-1}=C_{r-1}^{10}(x^2)^{11-r}(\frac{2^{r-1}}{x^{3r-3}})\Rightarrow$$

$$x^0=C_{r-1}^{10}2^{r-1}x^{22-2r}x^{-3r+3}\Rightarrow x^0=x^{25-5r}\Rightarrow 0=25-5r\Rightarrow -25=-5r\Rightarrow r=5$$

9- جد قيمة $(99)^4$ (باستخدام نظرية ذي الحدين) .

الحل : -

$$(99)^4=(100-1)^4=C_0^4(100)^4-C_1^4(100)^3(1)+C_2^4(100)^2(1)^2-C_3^4(100)(1)^3+C_4^4(1)^4$$

$$=100000000-4(1000000)+\frac{4\times 3}{2\times 1}(10000)-4(100)+1$$

$$=100000000-4000000+60000-400+1=100060001-4000400=96059601$$

10- جد قيمة $(98)^4-(102)^4$.

الحل :ــ نلاحظ أن هناك خمسة حدود لكل قوس منها سالبة منها موجبة والسالب يلغي الموجب كما نلاحظ

$$(100+2)^4-(100-2)^4=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5-P_1+P_2-P_3+P_4-P_5=2(P_2+P_4)$$

$$=2[C_1^4(100)^3(2)+C_3^4(100)(2)^3]=2[8000000+3200]=16000000+6400=16006400$$

11- جد قيمة $(2-\sqrt{3})^7+(2+\sqrt{3})^7$.

الحل : -

$$(100+2)^4-(100-2)^4=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7+P_8+P_1-P_2+P_3-P_4+P_5-P_6+P_7-P_8$$

$$2[P_1+P_3+P_5+P_7]=2[C_0^7 2^7+C_2^7 2^5(\sqrt{3})^2+C_4^7 2^3(\sqrt{3})^4+C_6^7 2(\sqrt{3})^6]=2[128+2016+2520+1134]=1159($$

إعداد
إبراهيم عبد الله فرج
07701734569
نينوى \ القيارة \ قرية الزاوية

الفصل الثاني
الغايات والاستمرارية

[6-1] جوار العدد neighbourhood

اذا كان a عدداً (نقطة) وكان $\in$ (تقرأ إبسلون) عدداً موجباً تسمى الفترة

1- $(a-\in , a+\in)$ جواراً للعدد a (الجوار هنا يحوي a)

2- $(a-\in , a]$ جواراً ايسر للعدد a (الجوار هنا يحوي a)

3- $[a , a+\in)$ جواراً ايمن للعدد a (الجوار هنا يحوي a)

فمثلا

اذا كان $a = 1 , \in = 1/2$ فان

.1 $(1-\frac{1}{2} , 1+\frac{1}{2})$ ، $(\frac{1}{2} , \frac{3}{2})$ جواراً للعدد 1

.2 $(1-\frac{1}{2} , 1]$ ، $(\frac{1}{2} , 1]$ جواراً ايسر للعدد 1

.3 $[1 , 1+\frac{1}{2})$ ، $[1 , \frac{3}{2})$ جواراً ايمن للعدد 1

مثال 1

اذا كان $a = 2$ ، $\in = \frac{1}{2}$ اكتب جواراً للعدد a ثم اكتب جوار اليسار وجوار اليمين

الحل

جوار العدد $a = 2$ هو الفترة المفتوحة $(2-\frac{1}{2} , 2+\frac{1}{2})$

$\therefore$ جوار العدد $a = 2$ هو الفترة المفتوحة $(\frac{3}{2} , \frac{5}{2})$

جوار اليسار للعدد $a = 2$ هو الفترة المفتوحة $(2-\frac{1}{2} , 2)$

$\therefore$ جوار اليسار للعدد a هو الفترة $(\frac{3}{2} , 2)$

جوار اليمين للعدد a هو الفترة $(2 , 2+\frac{1}{2})$

$\therefore$ جوار اليمين للعدد a هو الفترة $(2 , \frac{5}{2})$

مثال 2

اذا كان $a = 1$ اكتب ثلاث جوارت للعدد a .

الحل :ـ

(1) $\because a = 1$ يمكن ان نختار $\in = \frac{2}{5}$

$\therefore$ جوار العدد 1 هو الفترة $(\frac{3}{5} , \frac{7}{5}) = (1-\frac{2}{5} , 1+\frac{2}{5})$

(2) $\because a = 1$ نختار $\in = \frac{3}{4}$

$\therefore$ جوار العدد 1 هو الفترة $(\frac{1}{4} , \frac{7}{4}) = (1-\frac{3}{4} , 1+\frac{3}{4})$

(3) $\because a = 1$ يمكن ان نختار $\in = \frac{1}{4}$

$\therefore$ جوار العدد 1 هو الفترة $(\frac{3}{4} , \frac{5}{4}) = (1-\frac{1}{4} , 1+\frac{1}{4})$

[2-5] بعض المبرهنات في الغايات

1- غاية الدالة $f(x)$ ان وجدت فهي وحيدة وتعني :

اذا كان $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$ $\quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$

فإن $L_1 = L_2$

2- اذا كانت $f(x) = c$ حيث $c \in R$ عدد ثابت فإن

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$ (غاية الدالة الثابته = الثابت نفسه عند اي قيم تقترب منها x)

مثلاً

a) $\lim_{x \to 1} \sqrt{2} = \sqrt{2}$ ، b) $\lim_{x \to 0} 3 = 3$ ، c) $\lim_{x \to -1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

3- اذا كانت $f(x) = x$ فإن $\lim_{x \to a} f(x) = a$

اي ان : $\lim_{x \to a} x = a$

مثلاً

a) $\lim_{x \to -2} x = -2$ ، b) $\lim_{x \to \sqrt{3}} x = \sqrt{3}$ ، c) $\lim_{x \to \frac{1}{4}} x = \frac{1}{4}$

4- اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x)$ ، $\lim_{x \to a} g(x)$ موجودتين فإن :

$$\lim_{x \to a} [f(x) \mp g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \mp \lim_{x \to a} g(x)$$

مثلاً

a) $\lim_{x \to 1} (x+4) = \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 4$

$= 1 + 4 = 5$

b) $\lim_{x \to -5} (x-3) = \lim_{x \to -5} x - \lim_{x \to -5} 3$

$= -5 - 3 = -8$

5- اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة وكانت c عدد ثابت فإن :

$$\lim_{x \to a} c\, f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

مثلاً

a) $\lim_{x \to 2} 4x = 4 \cdot \lim_{x \to 2} x = 4 \cdot (2) = 8$

b) $\lim_{x \to 0} -3x = -3 \lim_{x \to 0} x = -3(0) = 0$

6- اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x)$ ، $\lim_{x \to a} g(x)$ موجودتين فإن :

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

a) $\lim_{x \to 2} x^2 = \lim_{x \to 2} x \cdot \lim_{x \to 2} x = 2 \times 2 = 4$

b) $\lim_{x \to 1} x(x+2) = (\lim_{x \to 1} x) \cdot (\lim_{x \to 1} (x+2))$

$= (\lim_{x \to 1} x)(\lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 2) = 1 \cdot (1+2) = 3$

7- اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ ، $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين وإن $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ فإن :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

مثلاً

a) $$\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 1}(x+2)}{\lim_{x\to 1}(x+1)} = \frac{\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 2}{\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1}$$

$$= \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2}{x+2} = \frac{\lim_{x\to 3}(x^2-2)}{\lim_{x\to 3}(x+2)} = \frac{\lim_{x\to 3} x^2 - \lim_{x\to 3} 2}{\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 2}$$

$$= \frac{3^2-2}{3+2} = \frac{7}{5}$$

مثال 8

جد قيمة ما يلي :

1) $\lim_{x\to -3} (x^3+2x)$

الحل

$$\lim_{x\to -3} x^3 + \lim_{x\to -3} 2x = (-3)^3 + 2 \cdot \lim_{x\to -3} x$$

$$= -27 + 2(-3) = -27 - 6$$

$$= -33$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+5}{2x+1} = \frac{\lim_{x\to 0}(x^2+5)}{\lim_{x\to 0}(2x+1)} = \frac{\lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{x\to 0} 5}{\lim_{x\to 0} 2x + \lim_{x\to 0} 1}$$

$$= \frac{0^2+5}{2(0)+1} = 5$$

مثال 9 لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$$

هل للدالة $f(x)$ غاية عندما $x \to 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+1)$$

$$= \lim_{x\to 1^+} x^2 + \lim_{x\to 1^+} 1 = 1^2 + 1 = 2 = L_1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x) = 2 \cdot \lim_{x\to 1^-} x = 2 \cdot 1 = 2 = L_2$$

$$\because L_1 = L_2$$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 2$ موجودة

مثال 10

جد قيمة $\lim_{x\to 1}\sqrt{4x+5}$ حيث $x \ge \frac{-5}{4}$

الحل

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{4x+5} = \sqrt{\lim_{x\to 1}(4x+5)}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 1}4x + \lim_{x\to 1}5}$$

$$= \sqrt{4(1)+5} = \sqrt{9} = 3$$

مثال 11

اذا كانت $f : \{x : x \ge -2 , x \in R\} \to R$ وان $f(x) = \sqrt{x+2}$ جد $\lim_{x\to -2} f(x)$

الحل

$x \longrightarrow -2$ حسب مجال الدالة f

$$\therefore \lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}\sqrt{x+2}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to -2}(x+2)} = \sqrt{\lim_{x\to -2}x + \lim_{x\to -2}2}$$

$$= \sqrt{-2+2} = \sqrt{0} = 0$$

مثال 12

جد قيمة $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ حيث $x \ge -1$

الحل

لو عوضنا قيمة $x = 3$ في البسط والمقام مباشرة نحصل على قيمة المقدار $= \frac{0}{0}$ وهي كمية غير معرّفة لذلك نضرب البسط والمقام بالعامل المرافق للبسط [لوجود الجذر في البسط].

أي انه :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3}1}{\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}) + \lim_{x\to 3}2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to 3}x + \lim_{x\to 3}1} + 2} = \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \frac{1}{4}$$

مثال 13 لتكن $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \leq 2 \\ x+1 & x > 2 \end{cases}$ هل للدالة $f(x)$ غاية عند 2 ؟

الحل :ـ

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = \lim_{x\to 2^+} x + \lim_{x\to 2^+} 1$$

$$= 2 + 1 = 3 = L_1$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (1-x) = \lim_{x\to 2^-} 1 - \lim_{x\to 2^-} x$$

$$= 1 - 2 = -1 = L_2$$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة لان $L_1 \neq L_2$

مثال 14 لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & x \leq 1 \\ 2x+a & x > 1 \end{cases}$ وأن $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة جد قيمة a

الحل $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة فإن الغاية من اليسار $L_1 = L_2$ الغاية من اليمين

$$\lim_{x\to 1^+} (2x+a) = \lim_{x\to 1^-} (x^2+2)$$

$$\lim_{x\to 1^+} 2x + \lim_{x\to 1^+} a = \lim_{x\to 1^-} x^2 + \lim_{x\to 1^-} 2$$

$$2(1) + a = 1^2 + 2$$

$$2 + a = 3 \Rightarrow a = 1$$

مثال 15 لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2+a & x > 1 \\ b-2x & x \leq 1 \end{cases}$ وكانت $\lim_{x\to -1} f(x)$ موجودة وان $\lim_{x\to -1} f(x) = 5$ جد قيمتي $a , b \in R$.

الحل $\lim_{x\to -1} f(x) = 5$ وان $-1 \in \{x : x \leq 1\}$ فإن $f(x) = b - 2x$

$$\lim_{x\to -1} (b - 2x) = 5$$

$$\lim_{x\to -1} b - \lim_{x\to -1} 2x = 5$$

$$b - 2(-1) = 5$$

$$b + 2 = 5 \Rightarrow b = 3$$

وكذلك $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة

هذا تعني ان $L_1 = L_2$

من اليسار $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ من اليمين

$$\lim_{x\to 1}(x^2+a)=\lim_{x\to 1}(b-2x)$$

$$\lim_{x\to 1} x^2+\lim_{x\to 1} a=\lim_{x\to 1} 3-\lim_{x\to 1} 2x$$

$$1^2+a=3-2(1)$$

$$1+a=1$$

$$\therefore a=0$$

مثال 16 اذا كانت $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{x+2}=2a+3$ جد قيمة a .

الحل

$$\frac{\lim_{x\to 1}(x^2+3x-1)}{\lim_{x\to 1}(x+2)}=2a+3$$

$$\frac{\lim_{x\to 1} x^2+\lim_{x\to 1} 3x-\lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1} x+\lim_{x\to 1} 2}=2a+3$$

$$\frac{1^2+3-1}{1+2}=2a+3$$

$$\frac{3}{3}=2a+3$$

$$1=2a+3\Rightarrow 1-3=2a$$

$$2a=-2\Rightarrow a=-1$$

مثال 17 جد قيمة $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$.

الحل

اذا عوضنا عن $x=3$ في البسط والمقام مباشرة نحصل على :

$\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}$ وهذا غير معرف

لذلك يجب ان نبسط الدالة وكما يلي :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}$$

$$\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

مثال 18 جد قيمة $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-8}{x^2-4}$

الحل

نحلل البسط والمقام قبل توزيع الغاية وكما يلي :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)}{\lim_{x\to 2}(x+2)}=\frac{2^2+2(2)+4}{2+2}=3$$

$$1)\ \lim_{x\to 0}(2x^3+5x+2)=2(0)^3+5(0)+2=2$$
$$2)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{4x^2+x}{2x}\right)^5=\left(\frac{4(1)^2+1}{2(1)}\right)^5=\left(\frac{5}{2}\right)^5=\frac{3125}{16}$$
$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x}{x+1}=\frac{3(1)^2+2(1)}{1+1}=\frac{5}{2}$$
$$4)\ \lim_{x\to 3}7=7$$

$$\lim_{x\to -2}(6x^3+5x^2)=\lim_{x\to -2}6x^3+\lim_{x\to -2}3x^2=\lim_{x\to -2}(6x^3+5x^2)=\lim_{x\to -2}6x^3+\lim_{x\to -2}3x^2$$
$$=6(-2)^3+3(-2)^2=-48+12=-36$$
$$\lim_{x\to 1}(2x^4-x^3)=\lim_{x\to 1}2x^4-\lim_{x\to 1}x^3=2(1)^4-(1)^3=1$$
$$=\lim_{x\to 1}(x^4-2x^3+3x^2+x)=\lim_{x\to 1}x^4-\lim_{x\to 1}2x^3+\lim_{x\to 1}3x^2+\lim_{x\to 1}x$$
$$=(1)^4-2(1)^3+3(1)^2+1=3$$
$$\lim_{x\to -1}(-2x^3-1)(5x^2+1)=\lim_{x\to -1}(-2x^3-1)\times\lim_{x\to -1}(5x^2+1)$$
$$=\left(-2(-1)^3-1\right)\left(5(-1)^2+1\right)=6$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+6}{5x^2-1}=\frac{\lim_{x\to 0}(2x+6)}{\lim_{x\to 0}(5x-1)}=\frac{6}{-1}=-6$$

أوجد $\lim_{x\to 3}f(x)$ إذا كانت $f(x)=\begin{cases}x^2-5 & ,x\le 3\\ \sqrt{x+13} & ,x>3\end{cases}$

الحل :ـ

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2-5)=3^2-5=4$$
$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(\sqrt{x+13})=\sqrt{3+13}=4$$

بما أن الغاية من اليمين تساوي الغاية من اليسار إذا لها غاية

حالات عدم التعيين

$$1)\ \lim_{x\to a}f(x)=\infty\times 0\ ,\ 2)\ \lim_{x\to a}f(x)=\infty-\infty\ ,\ 3)\ \lim_{x\to a}f(x)=\frac{\infty}{\infty},\ \ 4)\ \lim_{x\to a}f(x)=\frac{0}{0}$$

مثال : ـ

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

الحل: عدم التعيين $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0}$

لدينا $x\neq 3$ ، $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)$

إذن $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$

مثال ١٣: احسبالنهاية التالية : $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}$

الحل: عدم التعيين $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}=\frac{0}{0}$

من أجل $x\neq 0$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$

مثال ١٤: احسبالنهاية التالية : $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2}$

الحل: عدم التعيين $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2}=\frac{0}{0}$

من أجل $x\neq 0$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2}=\lim_{x\to 0}x^2=0$

مثال ١٥: احسب النهاية التالية: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$

الحل: عدم التعيين $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}=\dfrac{0}{0}$

فمن أجل $x\neq -3$ ، $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{-5}{-6}=\dfrac{5}{6}$

مثال ١٦: احسب النهاية التالية: $\lim\limits_{x\to\to 3}\dfrac{2x^2-2x-12}{x-3}$

الحل: عدم التعيين $\lim\limits_{x\to\to 3}\dfrac{2x^2-2x-12}{x-3}=\dfrac{0}{0}$

لدينا $\dfrac{2x^2-2x-12}{x^2-3}=\dfrac{(2x+4)(x-3)}{(x-3)}=2x+4$ من أجل $x\neq 3$

إذن $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-2x-12}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}2x+4=10$

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-2x}{8-4x}=\dfrac{0}{0}$ عدم التعيين

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-2x}{8-4x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(2-x)}{4(2-x)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4+4x^2}{x^4+3x^2}=\dfrac{0}{0}$ عدم التعيين

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4+4x^2}{x^4+3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(2x^2+4)}{x^2(x^2+3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+4}{x^2+3}=\dfrac{4}{3}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\dfrac{0}{0}$ عدم التعيين

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$

4) $\lim\limits_{u\to -1}\dfrac{u^2+2u+1}{u+1}=\dfrac{0}{0}$ عدم التعيين

مثال 3

$$\lim_{x\to -1}(x^2+3x)=\lim_{x\to -1}x^2+\lim_{x\to -1}3x$$
$$=(-1)^2+(3(-1))$$
$$=1-3=-2$$

مثال 4

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-4}{x-1}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(2x^2-4)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-1)}$$

$$\frac{2(-2)^2-4}{-2-1}=\frac{8-4}{-3}=\frac{-4}{3}$$

مثال 6

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4 & , \quad x \geq 1 \\ 5x & , \quad x < 1 \end{cases}$$

جد .

1. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

الحل :

1. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2+4) = 4+4 = 8$

2. $$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} (x^2+4) = 1+4 = 5 = L_1 \\ \lim\limits_{x \to 1} (5x) = 5 \times 1 = 5 = L_2 \end{cases}$$

$\therefore L_1 = L_2 \iff \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$ الغاية موجودة

مثال 7

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^2 + ax + a^2)$$

$$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

مثال 9

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} bx^2+3 & , \quad x \leq 2 \quad \text{اذا كانت} \\ c - 2x & , \quad x > 2 \quad \text{اذا كانت} \end{cases}$$

اذا كانت $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 11$ جد قيمة $b , c \in R$

الحل :

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ موجودة

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 11$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} (c - 2x) = c - 4 \Rightarrow c - 4 = 11 \Rightarrow c = 15$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (bx^2 + 3) = 4b + 3 \Rightarrow 4b+3 = 11 \Rightarrow b = 2$$

تمارين (2-1)

1- جد قيمة كل مما يأتي :

1) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 + 2x + 3)$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 + 1}{x + 1}$

3) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$

5) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 + 2x - 15}$

6) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 7x^2 - 8x}{3x^2 - 3}$

8) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^4 - 16}$

9) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

10) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{3x} - 3}$

11) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 17}{\sqrt{x + 10} + 3}$

$$1)\ \lim_{x \to -1} (x^3 + 2x + 3) = (-1)^3 + 2(-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$$

$$2)\ \lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 1}{x + 1} = \frac{0^4 + 1}{0 + 1} = 1$$

$$3)\ \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \frac{(-2)^2 + 2(-2)}{(-2)^2 - (-2) - 6} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \to -2} \frac{x(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x}{x-3} = \frac{-2}{-2-3} = \frac{2}{5}$$

$$4)\ \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{1^4 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 1} (x+1)(x^2+1) = (1+1)(1^2+1) = 4$$

$$5)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2+2x-15}=\frac{(3)^3-27}{(3)^2+2(3)-15}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2+2x-15}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+5)(x-3)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+3x+9)}{(x+5)}=\frac{(3)^2+3(3)+9}{3+5}=\frac{27}{8}$$

$$6)\ \lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2})^2-2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$7)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3+7x^2-8x}{3x^2-3}=\frac{(1)^3+7(1)^2-8(1)}{3(1)^2-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+7x^2-8x}{3x^2-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+8)(x-1)}{3(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+8)}{3(x+1)}=\frac{1(1+8)}{3(1+1)}=\frac{3}{2}$$

$$8)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}=\frac{(-2)^3+8}{(-2)^4-16}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^2-4)(x^2+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-2x+4)}{(x-2)(x^2+4)}=\frac{(-2)^2-2(-2)+4}{(-2-2)((-2)^2+4)}=\frac{12}{4(8)}=\frac{3}{8}$$

$$9)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{1^2-1}{\sqrt{1}-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{1}=(\sqrt{1}+1)(1+1)=4$$

$$10)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-9}{\sqrt{3x}-3}=\frac{1^2-9}{\sqrt{3(1)}-3}=\frac{-8}{\sqrt{3}-3}$$

$$11)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2+17}{\sqrt{x+10}+3}=\frac{(-1)^2+17}{\sqrt{-1+10}+3}=\frac{18}{\sqrt{9}+3}=\frac{18}{6}=3$$

2- إذا كانت $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x+6}{x+3}=3a-4$ جد قيمة a حيث $a\in R$

الحل :ـ

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x+6}{x+3}=3a-4\Rightarrow\frac{(4)^2-2(4)+6}{4+3}=3a-4$$

$$\frac{14}{7}=3a-4\Rightarrow 2=3a-4\Rightarrow 2+4=3a\Rightarrow 6=3a\Rightarrow a=3$$

3- إذا كانت $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 8$ جد قيمة a ، $a \in R$.

الحل :-

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 8 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = 8 \Rightarrow \lim_{x \to a} (x + a) = 8$$

$$\Rightarrow a + a = 8 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

4- اذا كانت $f(x) = ax^2 + bx$ وكانت $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$ ، $\lim_{x \to -2} f(x) = 8$ جد قيمتي a ، b الحقيقيين .

الحل :-

$$\lim_{x \to -2} (ax^2 + bx) = 8 \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) = 8 .... \div 2 \Rightarrow 2a - b = 4 ......(1)$$

$$\lim_{x \to 1} (ax^2 + bx) = 5 \Rightarrow a(1)^2 + b(1) = 5 \Rightarrow a + b = 5 ......(2)$$

$$2a - b = 4 ....(1)$$

$$a + b = 5 \quad ....(2)$$

$$3a = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 3 + b = 5 \Rightarrow b = 5 - 3 \Rightarrow b = 2$$

5- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x > 2 \\ 2 - 2x & x \leq 2 \end{cases}$$

a) هل للدالة f غاية عند 2 ؟ بين ذلك .

b) جد $\lim_{x \to 1} f(x)$

الحل :-

$$\lim_{x \to 2^+} (x^2 - 3) = (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1 .... L_1$$

$$\lim_{x \to 2^-} (2 - 2x) = 2 - 2(2) = 2 - 4 = -2 .... L_2$$

ليس للدالة غاية عند ٢ لأن $L_1 \neq L_2$

$$\lim_{x \to 1} (2 - 2x) = 2 - 2(1) = 2 - 2 = 0$$

6- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ 2 - x & x < 2 \end{cases}$$

هل للدالة f غاية عندما $x \longrightarrow 0$ ؟ بين ذلك

الحل :-

$$\lim_{x \to 0} (2 - x) = 2 - 0 = 2$$

7- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} a + 2x & x \leq -1 \\ 3 - x^2 & x > -1 \end{cases}$$

وكانت $\lim_{x \to -1} f(x)$ موجودة جد قيمة a حيث $a \in R$.

الحل :- $\lim_{x \to -1} f(x)$ موجودة أي أن الغاية من اليمين تساوي الغاية من اليسار $(L_1 = L_2)$

$$\lim_{x \to -1^+} (3 - x^2) = \lim_{x \to -1^-} (a + 2x) \Rightarrow 3 - (-1)^2 = a + 2(-1)$$

$$3 - 1 = a - 2 \Rightarrow 2 = a - 2 \Rightarrow 2 + 2 = a \Rightarrow a = 4$$

8- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 3x + a & x \geq 2 \\ x^2 - b & x < 2 \end{cases}$$

وكانت $\lim_{x \to 2} f(x)$ موجودة وأن $f(\sqrt{2}) = 5$ جد قيمة $a , b \in R$.

الحل :ـ

$$f(\sqrt{2}) = 5 \Rightarrow (\sqrt{2})^2 - b = 5 \Rightarrow 2 - b = 5 \Rightarrow 2 - 5 = b \Rightarrow b = -3$$

$\lim_{x \to 2} f(x)$ موجودة أي أن الغاية من اليمين تساوي الغاية من اليسار ($L_1 = L_2$)

$$\lim_{x \to 2^+} (3x - a) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - (-3)) \Rightarrow 3(2) - a = (2)^2 + 3$$

$$6 - a = 4 + 3 \Rightarrow 6 - a = 7 \Rightarrow 6 - 7 = a \Rightarrow a = -1$$

[2-6] استمرارية الدالة عند نقطة

Continuity of a function at point

اذا كانت f دالة وكان العدد a ينتمي الى مجال الدالة f وتحقق ما يلي :

1- $f(a)$ موجودة وحقيقية

2- $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة وحقيقية

3- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

فيقال ان الدالة f مستمرة عند النقطة $x = a$ واذا لم يتحقق اي شرط من الشروط الثلاث اعلاه فالدالة f غير مستمرة عند $x = a$

مثال :ـ إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x + 3$ هل الدالة مستمرة عند $x = 2$

الحل :ـ

الدالة كثيرة الحدود فإن أوسع مجال للدالة هو R

$$1)\ f(2) = (2)^2 + 4(2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

$$2)\ \lim_{x \to 2} (x^2 + 4x + 3) = (2)^2 + 4(2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

$$3)\ \because \lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 15$$

إذا الدالة مستمرة عند $x = 2$

مثال :ـ إذا كانت $f(x) = x^3 + 2x + 3$ هل الدالة مستمرة عند $x = -1$

الحل :ـ

الدالة كثيرة الحدود فإن أوسع مجال للدالة هو R

$$1)\ f(x) = x^3 + 2x + 3 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 + 2(-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$$

$$2)\ \lim_{x \to -1} (x^3 + 2x + 3) = (-1)^3 + 2(-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$$

$$3)\ \because \lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 0$$

إذا الدالة مستمرة عند $x = 2$

مثال :ـ إذا كانت $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 6}{x + 3}$ هل الدالة مستمرة عند $x = 4$

الحل :ـ

أوسع مجال للدالة هو $R \setminus \{-3\}$

$$1)\ f(x)=\frac{x^2-2x+6}{x+3} \Rightarrow f(4)=\frac{(4)^2-2(4)+6}{4+3}=\frac{14}{7}=2$$

$$2)\ \lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x+6}{x+3}=\frac{(4)^2-2(4)+6}{4+3}=\frac{14}{7}=2$$

$$3)\ \because \lim_{x\to 4} f(x)=f(4)=0$$

مثال :ـ

$f: R \rightarrow R$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x \geq 2 \\ 8-x, & x < 2 \end{cases}$$

اثبت ان الدالة مستمرة عند $x = 2$

الحل :ـ

$f(2) = (2)^2 + 2 = 6$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 2}(x^2+2)=4+2=6=L_1 \\ \lim_{x\to 2}(8-x)=8-2=6=L_2 \end{cases}$$

$\therefore L_1 = L_2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 6$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$\therefore$ f مستمرة عند $x = 2$

مثال :ـ إذا كانت $f(x)=x^2+2$ هل الدالة مستمرة عند $x = a$

الحل :ـ

الدالة كثيرة الحدود فإن أوسع مجال للدالة هو R

$f(a) = a^2 + 2$

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(x^2+2) = a^2 + 2$

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = a$

مثال :ـ إذا كانت $f(x)=8-x$ هل الدالة مستمرة عند $x = a$

الحل :ـ

الدالة كثيرة الحدود فإن أوسع مجال للدالة هو R

$f(a) = 8 - a$

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(8-x) = 8 - a$

$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = a$

تمارين (2-2)

1- لتكن $f(x) = x^3 + x^2 + 3$ ابحث استمرارية الدالة عند $x = 3$

الحل :ـ

الدالة كثيرة الحدود فإن أوسع مجال للدالة هو R

$$1)\ f(x) = x^3 + x^2 + 3 \Rightarrow f(3) = (3)^3 + (3)^2 + 3 = 27 + 9 + 3 = 39$$

$$2)\ \lim_{x\to 3}(x^3 + x^2 + 3) = (3)^3 + (3)^2 + 3 = 27 + 9 + 3 = 39$$

$$3)\ \because \lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

إذا الدالة مستمرة عند $x = 3$

2- لتكن $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ اثبت f مستمرة في مجالها .

الحل :ـ أوسع مجال للدالة هو R

$$1)\ f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow f(a) = \frac{a^2}{a^2+1}$$

$$2)\ \lim_{x\to a} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{a^2}{a^2+1}$$

$$3)\ \because \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

إذا الدالة مستمرة في مجالها

3- لتكن $f(x) = x^3$ ابحث استمرارية الدالة في مجالها .

$$1)\ f(x) = x^3 \Rightarrow f(a) = a^3$$

$$2)\ \lim_{x\to a} x^3 = a^3$$

$$3)\ \because \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

إذا الدالة مستمرة في مجالها

4- لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \geq -1 \\ 3x + 1 & x < -1 \end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة عند $x = -1$.

الحل :ـ

$$1)\ f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$2)\ \lim_{x\to -1^+}(x^2 - 2) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \text{..........}\ L_1$$

$$\lim_{x\to -1^-}(3x + 1) = 3(-1) + 1 = -3 + 1 = -2 \text{..........}\ L_2$$

$\because L_1 \neq L_2$ أي ليس للدالة غاية عند $x = -1$

إذا الدالة غير مستمرة عند $x = -1$

5- لتكن $f(x) = |x-2|$ ابحث استمرارية الدالة عند $x = 2$.

الحل :-

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 \ldots\ldots \forall x-2 \geq 0 \\ -(x-2) \ldots\ldots \forall x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 \ldots \forall x \geq 2 \\ 2-x \ldots \forall x < 2 \end{cases}$$

$1)\, f(2) = 2-2 = 0$

$2)\, \lim_{x\to 2^+} (x-2) = 2-2 = 0 \ldots\ldots\ldots\, L_1$

$\lim_{x\to 2^-} (2-x) = 2-2 = 0 \ldots\ldots\ldots\, L_2$

$\because L_1 = L_2$ أي أن للدالة غاية عند $x = 2$

$3)\, \because \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

إذا الدالة مستمرة عند $x = 2$

6- لتكن $f(x) = \begin{cases} 1-2x & x \leq 2 \\ 1-x^2 & x > 2 \end{cases}$ اثبت ان f مستمرة عند $x = 2$

الحل :-

$1)\, f(2) = 1-2(2) = -3$

$2)\, \lim_{x\to 2^-} (1-2x) = 1-2(2) = -3 \ldots\ldots\ldots\, L_1$

$\lim_{x\to 2^+} (1-x^2) = 1-(2)^2 = -3 \ldots\ldots\ldots\, L_2$

$\because L_1 = L_2$ أي أن للدالة غاية عند $x = 2$

$3)\, \because \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

إذا الدالة مستمرة عند $x = 2$

7- لتكن $f(x) = \begin{cases} ax+3 & x \geq 1 \\ 3x^2+1 & x < 1 \end{cases}$ جد قيمة $a \in R$ اذا كانت f مستمرة عند $x=1$.

الحل :-

الدالة مستمرة عند $x = 2$ أي أن الغاية من اليمين تساوي الغاية من اليسار ($L_1 = L_2$)

$$\lim_{x\to 1^+} (ax+3) = \lim_{x\to 1^-} (3x^2+1) \Rightarrow a(1)+3 = 3(1)^2+1$$

$$a+3 = 4 \Rightarrow a = 4-3 \Rightarrow a = 1$$

8- لتكن $f(x) = \begin{cases} 2x+b & x \leq -1 \\ x^2+a & x > -1 \end{cases}$ جد قيمتي $a , b \in R$ اذا كانت f مستمرة عند $x = -1$ وان $f(2) = 7$.

الحل :-

$$f(2) = 7 \Rightarrow (2)^2 + a = 7 \Rightarrow a = 7-4 \Rightarrow a = 3$$

الدالة مستمرة عند $x = -1$ أي أن الغاية من اليمين تساوي الغاية من اليسار ($L_1 = L_2$)

$$\lim_{x\to -1^+} (x^2+3) = \lim_{x\to -1^-} (2x+b) \Rightarrow (-1)^2+3 = 2(-1)+b \Rightarrow 4 = -2+b \therefore b = 4+2 = 6$$

الفصل الثالث

الإشتقاق
Differentiation

يقال للدالة الحقيقية $y = f(x)$ إنها قابلة للاشتقاق عند x_0 في مجال الدالة إذا كانت الغاية الآتية موجودة

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

وان قيمة الغاية تسمى مشتقة الدالة في تلك النقطة ويرمز لها بالرمز $f'(x_0)$ او $\frac{dy}{dx}$ او y'

أي ان :
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مثال 1

إذا كان $f(x) = x^2$ جد $f'(3)$ باستخدام التعريف .

الحل

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2 - (3)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9+6(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 9}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6 + \Delta x)}{\Delta x} = 6 + 0 = 6$$

مثال 2

إذا كان $f(x) = x^2 + x + 1$ جد $f'(2)$ باستخدام التعريف .

الحل

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 + (2 + \Delta x) + 1 - (4 + 2 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4+4(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 2 + \Delta x + 1 - 7}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(5+ \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(2) = 5 + 0 = 5$$

مثال 3

جد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ مستخدماً التعريف .

الحل

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(x + \Delta x)x} = \frac{-1}{x^2}$$

مثال 4

جد مشتقة الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ مستخدماً التعريف .

الحل

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال 1

اذا كان

$$f(x) = x_2 + 5x + 3$$

جد $\acute{f}(2)$ مستخدماً التعريف

الحل :

$$\acute{f}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 + 5(2+\Delta x) + 3 - 17}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + 10 + 5\Delta x - 14}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x + (9 + \Delta x)}{\Delta x} = 9$$

مثال 2

$$f(x) = \sqrt{x + 3} \qquad x \geq -3$$

جد : $\acute{f}(1)$ باستخدام التعريف .

$$\acute{f}(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \Delta x + 3} - 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4 + \Delta x} - 2}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{4 + \Delta x} + 2}{\sqrt{4 + \Delta x} + 2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + \Delta x - 4}{x(\sqrt{4 + \Delta x} + 2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

معادلة المماس لمنحني الدالة عند نقطة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال 5

اذا كان $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ جد باستخدام التعريف $f'(2)$ ثم جد معادلة المماس للمنحني عند هذه النقطة .

الحل

$$f(2) = 2(2)^2 + 3(2) + 1 = 15 \Rightarrow (2,15)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(2+\Delta x)^2 + 3(2+\Delta x) + 1 - 15}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + 8\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 6 + 3(\Delta x) + 1 - 15}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11(\Delta x) + 2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (11 + 2(\Delta x)) = 11 + 0 = 11$$

ميل المماس للمنحني عند $(2,15)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 15 = 11(x - 2)$$

معادلة المماس $\Rightarrow 11x - y - 7 = 0$

[2-7] تطبيقات فيزيائية على المشتقة

الازاحة = البعد عن موقع الحركة = S (t) = P (t)

السرعة الآنية = V (t)

التعجيل = g (t)

$$\begin{matrix} S(t) & \xrightarrow{\text{التفاضل}} & \dfrac{ds}{dt} & \xrightarrow{\text{التفاضل}} & \dfrac{dv}{dt} \\ p(t) & & v(t) & & \end{matrix}$$

الازاحة	السرعة	التعجيل
البعد عن موقع الحركة	السرعة الآنية	g (t)

∴ مشتقة الازاحة = السرعة

مشتقة السرعة = التعجيل

مثال 1

جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعد

$$S = p(t) = 3t^2 + 5t + 8$$

حيث (t) p الازاحة بالامتار والزمن t بالثواني ، جد سرعة الجسم الانية باستخدام التعريف .

$$p'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(t+\Delta t)^2 + 5(t+\Delta t) + 8 - (3t^2 + 5t + 8)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 + 5t + 5\Delta t + 8 - 3t^2 - 5t - 8}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t\,(6t + 3\Delta t + 5)}{\Delta t} \quad 6t + 5$$ م/ثا السرعة الانية

مثال 6 لتكن $f(t) = 2t^2 + 3$ تمثل حركة جسم في اي لحظة بالامتار جد موقع الجسم وسرعته بعد 2 ثانية من بدأ الحركة.

الحل

$$f(t) = 2t^2 + 3$$

$$f(2) = 2(2)^2 + 3$$

$$= 8 + 3 = 11$$ متر موقع الجسم

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(2+\Delta t) - f(2)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2(2+\Delta t)^2 + 3 - 11}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{8 + 8\Delta t + 2(\Delta t)^2 - 8}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t\,(8 + 2(\Delta t))}{\Delta t} = 8 + 2(0) = 8$$ متر / ثا

سرعة الجسم بعد 2 ثانية

مثال 7 لتكن $v(t) = 3t^2$ جد التعجيل بعد 2 ثانية.

الحل

$$a(2) = v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(2+\Delta t) - v(2)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(2+\Delta t)^2 - 3(2)^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{12 + 12(\Delta t) + 3(\Delta t)^2 - 12}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t\,(12 + 3(\Delta t))}{\Delta t} = 12 + 0 = 12$$ التعجيل م/ثا^2

تمارين (3-1)

1- جد مشتقة الدالة $f(x) = x^2 + 5x$ باستخدام التعريف ثم احسب $f'(3)$, $f'(0)$

الحل :-

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3 + \Delta x)^2 + 5(3 + \Delta x) - [(3)^2 + 5(3)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 + 15 + 5\Delta x - 24}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(11 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(11 + \Delta x)}{1} = 11 + 0 = 11$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0 + \Delta x)^2 + 5(0 + \Delta x) - [(0)^2 + 5(0)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 5)}{\Delta x}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x + 5)}{1} = 0 + 5 = 5$$

2- جد المشتقة بطريقة التعريف لكل مما يأتي :

a) $\frac{3}{x - 1}$

b) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

الحل :-

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3}{x + \Delta x - 1} - \frac{3}{x - 1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3x - 3 - 3x - 3\Delta x + 3}{x^2 - x + x\Delta x - \Delta x - x + 1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{-3\Delta x}{x^2 - 2x + x\Delta x - \Delta x + 1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3\Delta x}{x^2 - 2x + 2 + x\Delta x - \Delta x} \times \frac{1}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3}{(x-1)(x-1) + x\Delta x - \Delta x} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x + 1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x + 1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x + 1 - x - 1}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x+1})} = \frac{1}{\sqrt{x + 0 + 1} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

3- اذا كانت $f(x) = x^2 - 3x - 4$ جد $f'(x)$ مستخدما التعريف ثم جد معادلة المماس لمنحني الدالة عند $x = 1$.

الحل :ـ

$$f(1) = 1^2 - 3(1) - 4 = 1 - 3 - 4 = -6 \Rightarrow (1,-6)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 3(1+\Delta x) - 4 - [(1)^2 - 3(1) - 4]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 3 - 3\Delta x - 4 + 6}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-1 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-1 + \Delta x)}{1} = -1 + 0 = -1$$

معادلة المماس هي

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 6 = -1(x-1) \Rightarrow y + 6 + x - 1 = 0 \Rightarrow y + x + 5 = 0$$

4- جسم يتحرك وفق العلاقة حيث f الازاحة بالامتار معطاة بالعلاقة $f(t) = t^2 + 2t + 1$

جد سرعة الجسم بعد 3 ثواني من بدأ الحركة .

الحل :ـ

$$f(1) = 3^2 + 2(3) + 1 = 9 + 6 + 1 = 16.m$$

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$f'(3)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(3+\Delta t)-f(3)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(3+\Delta t)^2+2(3+\Delta t)+1-16}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{9+6\Delta t+(\Delta t)^2+6+2\Delta t+1-16}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{8\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t(8+\Delta t)}{\Delta t}$$
$$f'(3)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(8+\Delta t)}{1}=8+0=8$$

سرعة الجسم بعد ٣ ثانية

5- اذا كانت السرعة معطاة بالعلاقة $v(t)=t^2+t+1$ م/ثا . جد التعجيل عند $t=1$ ثانية .

الحل :ـ

$$v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$
$$v'(3)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(1+\Delta t)-v(1)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(1+\Delta t)^2+(1+\Delta t)+1-[1+1+1]}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1+2\Delta t+(\Delta t)^2+1+1\Delta t+1-3}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t(3+\Delta t)}{\Delta t}$$
$$v'(1)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(3+\Delta t)}{1}=3+0=3$$

مثال ١: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x)=x^2+2$

الحل:
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+2-(x^2+2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+2)-(x^2+2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\Delta x=2x$$

مثال ٢: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x)=1-x^2$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-(x+\Delta x)^2-(1-x^2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-x^2-2x\Delta x-(\Delta x)^2-1+x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-2x-\Delta x=-2x$$

مثال ٤: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $s=2+3t^2$

الحل:
$$s'=\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2+3(t+\Delta t)^2-2-3t^2}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2+3t^2+6t\Delta t+3(\Delta t)^2-2-3t^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{6t\Delta t+3(\Delta t)^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}6t+3\Delta t=6t$$

مثال ٥: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x)=2x+5$

الحل: $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)+5-(2x+5)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x+5-2x-5}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2=2$$

مثال ٦: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x)=\sqrt{3x-7}$

الحل: $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}-\sqrt{3x-7}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}-\sqrt{3x-7}}{\Delta x}\,\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}}{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)-7-(3x-7)}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x+3\Delta x-7-3x+7}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3}{\sqrt{3x+3\Delta x-7}+\sqrt{3x-7}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3x-7}+\sqrt{3x-7}}=\frac{3}{2\sqrt{3x-7}}$$

إعداد
إبراهيم عبد الله فرج
07701734569
نينوى \ القيارة \ قرية الزاوية

[3-7] قواعد المشتقة

1. لتكن $f(x)=c$ دالة ثابتة

فإن $f'(x)=0$

أي أن $\frac{dy}{dx}=0$

مثال 1

جد $f'(x)$

$f(x)=5 \Rightarrow f'(x)=0$

$f(x)=\sqrt{2} \Rightarrow f'(x)=0$

$a)\ f(x)=3 \Rightarrow f'(x)=0$

$b)\ f(x)=\sqrt{5} \Rightarrow f'(x)=0$

$c)\ f(x)=3a \Rightarrow f'(x)=0$

2. لتكن $f(x)=x^n$

حيث $n \in R\ ,\ x \in R \setminus \{0\}$

فأن $f'(x)=nx^{n-1}$

مثال 2

1. $f(x)=x^6$

$\therefore f'(x)=6x^5$

2. $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$

$\therefore f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$a)\ f(x)=x^5 \Rightarrow f'(x)=5x^4$

$b)\ f(x)=x^{-3} \Rightarrow f'(x)=-3x^{-4}=\frac{-3}{x^4}$

$c)\ f(x)=x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

$d)\ f(x)=x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}=\frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}$

$e)\ g(t)=\sqrt[5]{t} \Rightarrow g(t)=t^{\frac{1}{5}} \Rightarrow g'(t)=\frac{1}{5}t^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5t^{\frac{4}{5}}}$

3.

$f(x)=cg(x)$

$f'(x)=cg'(x)$

مثال :ـ

جد $f'(x)$:

a) $f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3(2x) = 6x$

b) $f(x) = 5x^4 \Rightarrow f'(x) = 5(4x^3) = 20x^3$

4.

$f(x) = g(x) \pm n(x)$

$f'(x) = g'(x) \pm n'(x)$

مثال 3

$$g(x) = \frac{3}{2x^2} + \frac{5x^2}{3} - \frac{7x}{5} - \frac{1}{6}$$

$$g(x) = \frac{3}{2}x^{-2} + \frac{5x^2}{3} - \frac{7x}{5} - \frac{1}{6}$$

$$g'(x) = -3x^{-3} + \frac{10x}{3} - \frac{7}{5}$$

a) $f(x) = 3x^5 + 7x \Rightarrow f'(x) = 15x^4 + 7$

b) $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x \Rightarrow f'(x) = 4x + \frac{1}{2}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 9 \Rightarrow f'(x) = x - 4x^2$

.5

$f(x) = g(x) \cdot n(x)$

$f'(x) = g(x)\, n'(x) + n(x)\, g'(x)$

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الاولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثاني × مشتقة الدالة الاولى

جد $f'(x)$:

a) $f(x) = (x^4 - x^2 + 1)(5x^6 - 3x)$

$$f'(x) = (x^4 - x^2 + 1)(30x^5 - 3) + (5x^6 - 3x)(4x^3 - 2x)$$

b) $f(x) = \sqrt{x}(x+6) \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}}(x+6)$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{2}}(1) + (x+6)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

مشتقة حاصل قسمة بيانـي دالتين = $\dfrac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال 5

$$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+5}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+5)(2x+3)-(x^2+3x+1)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

جد مشتقة الدالة عند $x=1$ اذا كانت

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^4+1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^4+1)(3x^2)-(x^3+1)(4x^3)}{(x^4+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(1^4+1)(3(1)^2)-(1^3+1)(4(1)^3)}{(1^4+1)^2}$$

$$= \frac{2\times 3-2\times 4}{2^2} = \frac{6-8}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

.7

اذا كان $u=g(x)$

فأن $g'(x) = \dfrac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(u)^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

مثال 6

$y = (1-x)^3$ جد y' , y'' عند $x = 2$

الحل :

$y = (1-x)^3$

$y' = 3(1-x)^2\ (-1)$

$y' = -3\ (1-x)^2$

عند $x=2$

$\therefore y' = -3(1-2)^2 = -3$

$y'' = -6\ (1-x)\ (-1)$

$y'' = 6(1-x)$

عندما $x=2$

$y'' = 6(1-2) = -6$

جد $f'(x)$ في كل مما يأتي :ـ

a) $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^5$

$f'(x) = 5(x^3 + x^2 + x + 1)^4 (3x^2 + 2x + 1)$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

$f(x) = (x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)^{-\frac{1}{2}} (2x - 2)$

$f'(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$

c) $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^4$ ، جد $f'(x)$ عند نقطة $x = 1$

$f'(x) = 4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3 \frac{(x+1)(1) - x(1)}{(x+1)^2}$

$f'(1) = 4\left(\frac{1}{1+1}\right)^3 \times \frac{2-1}{(1+1)^2}$

$f'(1) = 4 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

مثال 15 اذا كانت $y = x^4 + 5x^3 + 3$ جد y', y''

الحل

$\because \; y = x^4 + 5x^3 + 3$

$\therefore \; y' = 4x^3 + 15x^2$

$y'' = 12x^2 + 30x$

مثال 16 اذا كانت $f(x) = 2x^3 + 4 + \frac{3}{x}$ جد $f'(x), f''(x), f''(-1)$

الحل

$\because f(x) = 2x^3 + 4 + 3x^{-1}$

$\therefore f'(x) = 6x^2 - 3x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 6x - \frac{3}{x^2}$

$f''(x) = 12x + 6x^{-3} \Rightarrow f''(x) = 12x + \frac{6}{x^3}$

$\therefore f''(-1) = 12(-1) + \frac{6}{(-1)^3} = -12 - 6 = -18$

أمثلة متنوعة حول المشتقة

مثال ٧: إذا كانت $y = x^3$

فإن $y' = 3x^{3-1} = 3x^2$

مثال ٨: إذا كانت $y = x^{-4}$

فإن $y' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

مثال ١٠: إذا كانت $y = 3x^6$

فإن $y' = 3 \times 6x^{6-1} = 18x^5$

مثال ١١: أوجد مشتقة الدالة $y = 5\sqrt[3]{x}$

الحل: لدينا $y = 5\sqrt[3]{x} = 5(x)^{\frac{1}{3}}$

إذن $y' = \frac{1}{3} \times 5x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

مثال ١٢: لتكن الدالة $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$

فإن $y' = -3 \times 4x^{-3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1} = -12x^{-4} - 10x + 7$

تمرين1 : اشتق الدوال الآتية

1) $y = \sqrt[5]{x^{13} + 13 + x^{-13}}$

2) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^4 + 1}$

3) $y = \left(\dfrac{x+2}{x^2 - 3x}\right)^2$

4) $y = (x^3 - 2x^2)^4$

5) $y = \sqrt[3]{(1 + x^2)^4}$

6) $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{5x^{-3}}{2}$

7) $y = \dfrac{5}{x^2 - 7x + 3}$

8) $y = (4x^2 - 3)^2(x + 5)$

9) $y = -\dfrac{7}{x^9}$

10) $y = \sqrt{\dfrac{4}{x^3}} - \sqrt{3x}$

11) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{(x^2 + 7)^{\frac{1}{3}}}$

12) $f(t) = \sqrt{\dfrac{3t^2 - 4}{2t + 5}}$

الحل:

1) $y = \sqrt[5]{x^{13} + 13 + x^{-13}} = \left(x^{13} + 13 + x^{-13}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$y' = \frac{1}{5}\left(13x^{12} - 13x^{-14}\right)\left(x^{13} + 13 + x^{-13}\right)^{-\frac{4}{5}}$$

2) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^4 + 1} \Rightarrow y' = \dfrac{3x^2(x^4 + 1) - 4x^3(x^3 - 1)}{(x^4 + 1)^2}$

3) $y = \left(\dfrac{x+2}{x^2 - 3x}\right)^2$

$$y' = 2\left(\frac{x+2}{x^2 - 3x}\right)\left[\frac{(x^2 - 3x) - (2x - 3)(x + 2)}{(x^2 - 3x)^2}\right]$$

4) $y = (x^3 - 2x^2)^4 \quad \Rightarrow y' = 4(x^3 - 2x^2)^3(3x^2 - 4x)$

5) $y = \sqrt[3]{(1 + x^2)^4} \quad \Rightarrow y = (1 + x^2)^{\frac{4}{3}}$

$$y' = \frac{4}{3}(1 + x^2)^{\frac{4}{3}-1}(2x) = \frac{8}{3}x(1 + x^2)^{\frac{1}{3}}$$

6) $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{5x^{-3}}{2} \quad \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2} + 3 \times \dfrac{5}{2}x^{-4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{15}{2}x^{-4}$

7) $y = \dfrac{5}{x^2 - 7x + 3} \quad \Rightarrow y' = \dfrac{-5(2x - 7)}{(x^2 - 7x + 3)^2}$

8) $y = (4x^2 - 3)^2(x + 5)$

$$y' = 2\times 8x(4x^2-3)(x+5)+(4x^2-3)^2 = 16x(4x^2-3)(x+5)+(4x^2-3)^2$$

9) $y = -\dfrac{7}{x^9} \quad \Rightarrow y' = -\dfrac{-7\times 9x^8}{(x^9)^2} = \dfrac{63x^8}{x^{18}} = \dfrac{63}{x^{10}}$

10) $y = \sqrt{\dfrac{4}{x^3}} - \sqrt{3x} \Rightarrow y = \left(\dfrac{4}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} - (3x)^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow y' = \frac{-4\times 3x^2}{(x^3)^2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{6}{x^4}\left(\frac{4}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{3}{x^4}\sqrt{x^3} - \frac{1}{2x}\sqrt{3x}$$

11) $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$

$$f'(x) = \frac{4x(x^2+7)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(2x^2-3)(x^2+7)^{-\frac{2}{3}}(2x)}{\left[(x^2+7)^{\frac{1}{3}}\right]^2} = \frac{4x - \frac{2}{3}x(2x^2-3)(x^2+7)^{-1}}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2x\left[2 - \frac{1}{3}(2x^2-3)(x^2+7)^{-1}\right]}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$$

12) $f(t) = \sqrt{\dfrac{3t^2-4}{2t+5}} = \left(\dfrac{3t^2-4}{2t+5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{3t^2-4}{2t+5}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{6t(2t+5)-2(3t^2-4)}{(2t+5)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2t+5}{3t^2-4}}\,\frac{6t^2+30t+8}{(2t+5)^2}$$

تمارين (2-3)

1- جد باستخدام القواعد مشتقة كل من الدوال التالية عند العدد المؤشر ازائها :

$$a)\ f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1 \quad , x = 1$$

$$b)\ f(x) = (4 - x)(x^2 + 3) \quad , x = 2$$

$$c)\ f(x) = \frac{4 - 5x}{x^2 + x + 1} \quad , x = -1$$

$$d)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \quad , x = 0$$

$$e)\ f(x) = x + \frac{3}{x^2 + 2} \quad , x = -1$$

الحل :ـ

$$a).\ f'(x) = 3x^2 - 8x + 1 \Rightarrow f'(1) = 3(1) - 8(1) + 1 = 3 - 8 + 1 = -4$$

$$b).\ f'(x) = (4 - x)(2x) + (x^2 + 3)(-1) \Rightarrow f'(2) = (4 - 2)(2 \times 2) + (2^2 + 3)(-1) = 8 - 7 = 1$$

$$c).\ f'(x) = \frac{(x^2 + x + 1)(-5) - (4 - 5x)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{((-1)^2 - 1 + 1)(-5) - (4 - 5 \times -1)(2 \times -1 + 1)}{((-1)^2 - 1 + 1)^2}$$

$$= \frac{1 \times -5 - [9 \times -1]}{1^2} = -5 + 9 = 4$$

$$d).\ f(x) = (2x + 1)^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2}(2x + 1)^{\frac{-3}{2}}(2) \Rightarrow f'(0) = -1(2 \times 0 + 1)^{\frac{-3}{2}} = -1 \times 1 = -1$$

$$e).\ f'(x) = 1 + \frac{(x^2 + 2)(0) - (3)(2x)}{(x^2 + 2)^2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{0 - 3(2 \times -1)}{((-1)^2 + 2)^2} = \frac{-6}{3^2} = \frac{-2}{3}$$

2- اذا كانت $f(x) = (x^2 - 3)^4$ جد $f'(x), f''(x)$ عند $x = 2$.

الحل :ـ

$$f'(x) = 4(x^2 - 3)^3(2x) \Rightarrow f'(2) = 4(2^2 - 3)^3(2 \times 2) = 4 \times 1 \times 4 = 16$$

$$f'(x) = 8x(x^2 - 3)^3 \Rightarrow f''(x) = 8x[3(x^2 - 3)^2(2x)] + (x^2 - 3)^3(8)$$

$$f''(2) = 8 \times 2[3(2^2 - 3)(2 \times 2)] + (2^2 - 3)^3(8) = 16[12] + 1 \times 8 = 192 + 8 = 200$$

3- اذا كانت $f(x) = (x^3 + 3x^2 - 3)^{\frac{3}{2}}$ جد $f'(x), f'(2)$

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x^3 + 3x^2 - 3)^{\frac{1}{2}}(3x^2 + 6x) \Rightarrow f'(2) = \frac{3}{2}(2^3 + 3 \times 2^2 - 3)^{\frac{1}{2}}(3 \times 2^2 + 6 \times 2)$$

$$= \frac{3}{2}(17)^{\frac{1}{2}}(24) = 36\sqrt{17}$$

[3-5] التطبيقات الهندسية والفيزياوية باستخدام قواعد المشتقة

مثال 17 جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x)=x^2-5x+2$ عند $x=1$.

الحل

$$f(1)=1-5+2=-2$$

ميل المماس $\quad f'(x)=2x-5 \Rightarrow f'(1)=2(1)-5=-3$

$\therefore$ النقطة $(1,-2)$ $\quad f(1)=1^2-5(1)+2=-2$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y+2=-3(x-1)$$

معادلة المماس $\quad y+2=-3x+3 \Rightarrow y+3x-1=0$

مثال 18 جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$ عند $x=5$

الحل

$$\because f(x)=(x+3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(x+3)^{\frac{-2}{3}}(1)$$

$\therefore$ النقطة $(5,2)$ $\quad f(5)=\sqrt[3]{5+3}=2 \Rightarrow$

ميل المماس عند اية نقطة

$$\because f'(x)=\frac{1}{3(x+3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(5)=\frac{1}{3(5+3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\times 8^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{12}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

حيث ان $m=f'(5)$

$$y-2=\frac{1}{12}(x-5) \Rightarrow 12y-24=x-5$$

معادلة المماس $\quad \Rightarrow 12y-x-19=0$

مثال:ــ إذا كانت $y=\frac{2x+1}{3-x}$ جد معادلة المماس والعمود على المماس عند $y=5$

الحل :ــ

$$5=\frac{2x+1}{3-x} \Rightarrow 2x+1=15-5x \Rightarrow x=\frac{14}{7}=2$$

$\therefore$ النقطة $(2,5)$

$$y'=\frac{(3-x)(2)-(2x+1)(-1)}{(3-x)^2}=\frac{7}{(3-x)^2}$$

$$f'(2)=\frac{7}{(3-2)^2}=7$$

ميل المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-5=7(x-2) \Rightarrow y-5=7x-14 \Rightarrow y-7x+9=0$$

ميل العمود $=\frac{-1}{7}$

$$y-5=\frac{-1}{7}(x-2) \Rightarrow 7y-35=-x+2 \Rightarrow 7y+x-37=0$$

مثال 20 جد معادلة المماس للمنحني $y= x^2 + 1$ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات

الحل نقطة التقاطع مع محور الصادات يعني $x = 0$

$$y = 0 + 1 = 1$$

$\therefore$ النقطة هي $(0,1)$

ميل المماس للمنحني

$$y' = 2x = 2(0) = 0$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 0(x - 0)$$

$\therefore$ معادلة المماس $y - 1 = 0$

مثال 21 جد نقطة تنتمي الى المنحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $y + 2x + 3$

الحل ميل المستقيم المعلوم = $\dfrac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$

$\therefore$ ميل المستقيم $= \dfrac{2}{1}$

ميل المماس -2 = ميل المستقيم المعلوم ، لانهما متوازيان

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$2x - 4 = -2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

نعوض في المعادلة الاصليه لاستخراج قيمة y

$$y = 1^2 - 4(1) + 5$$

$$y = 2$$

$\therefore$ النقطة $(1,2)$

مثال 1

جد معادلة المماس للمنحني $f(x) = (3-x^2)^4$ عند $x = 2$

الحل :

$f(2) = (3-4)^4 = 1$

$\therefore$ النقطة $(2,1)$

$f'(x) = 4(3 - x^2)^3(-2x)$

$f'(2) = 4(3-4)^3(-4)$

$= 4(-1)^3(-4) = 16$ ميل المماس

$16x - 32 = y - 1$

$16x - y - 32 + 1 = 0$

$16x - y - 31 = 0$

مثال 2

جد معادلة المماس والعمود على المماس للمنحني $f(x) = (2x-1)^5$ عند $x = 1$

الحل :

$f(1) = (2-1)^5 = 1$

$\therefore (1, 1)$ نقطة التماس

$f'(x) = 5\,(2x-1)^4\,(2)$

$= 10\,(2x-1)^4$

$f'(1) = 10\,(2-1)^4 = 10$ ميل المماس

$10x - 10 = y - 1$

$10x - y - 9 = 0$ معادلة المماس

$10y + x - 11 = 0$ معادلة العمود

مثال :--- جد معادلة المماس والعمود على المماس للمنحني $y=2x-1$ عندما $x=1$

الحل :--- نجد أولا نقطة التماس وذلك بتعويض قيمة x فنحصل على $y_1=2(1)-1=1$

أي إن نقطة التماس هي $(1,1)$ ثم نجد بعد ذلك الميل $y'=2$ أي $m=2$

ثم نطبق معادلة المماس

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow 2 = \frac{y-1}{x-1} \Rightarrow 2x-2 = y-1 \Rightarrow 2x-2-y+1=0 \Rightarrow 2x-y-1=0$$

نطبق معادلة العمود على المماس

$$\frac{-1}{m} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{y-1}{x-1} \Rightarrow 2y-2 = -x+1 \Rightarrow 2y-2+x-1=0 \Rightarrow x+2y-3=0$$

ومن تطبيقات المشتقة أيضاً السرعة والتعجيل حيث إن السرعة هي المشتقة الأولى التعجيل هو المشتقة الثانية وهذا المخطط يوضح ذل

$$\begin{array}{ccccc} & \text{التفاضل} & & \text{التفاضل} & \\ S(t) & \longrightarrow & ds/dt & \longrightarrow & dv/dt \\ \text{الإزاحة} & & \text{السرعة} & & \text{التعجيل} \\ & & v(t) & & g(t) \end{array}$$

مثال :--- جسم تحرك بخط مستقيم حسب العلاقة $S=p(t)=t^3+2t^2+7$ حيث أن $p(t)$ الإزاحة بالأمتار والزمن t بالثواني جد سرعة الجسم وموضعه وتعجيله بعد ثانيتين

الحل :--- الزمن $t = 2$

$P(2)=2^3+2(2)^2+7=8+8+7=23$ m

$V(t)=3t^2+4t$

$V(2)=3(2)^2+4(2)=12+8=20$ m/s

$g(t)=6t+4$

$g(2)=6(2)+4=16$ m/s^2

مثال 22 اذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + ax + b$ وكان ميل المماس للمنحني عند $x=-1$ هو 4 وكان المنحني يمر بالنقطة $(-3,2)$ جد قيمة a , b الحقيقيتين .

الحل

$f'(x) = 2x + a$

$4 = 2(-1) + a \Rightarrow a = 6$

$2 = (-3)^2 + 6(-3) + b$ نعوض $(-3,2)$ بالدالة الاصلية

$2 = 9 - 18 + b \Rightarrow b = 11$

مثال 23 جسم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة $s(t) = t^3 + 3t^2 + 4t + 1$ حيث $s(t)$ تقاس بالامتار والزمن بالدقائق جد موضعه وسرعته وتعجيله بعد (5) دقائق من بدأ حركته .

الحل

$s(5) = 5^3 + 3(5)^2 + 4(5) + 1$

$s(5) = 125 + 75 + 20 + 1 = 221$ متر الموقع

$v(t) = \acute{s}(t) = 3t^2 + 6t + 4$

$v(5) = 3(5)^2 + 6x5 + 4 = 75 + 30 + 4 = 109$ م / دقيقة السرعة

$a(t) = \acute{v}(t) = 6t + 6$

$a(5) = 6(5) + 6 = 36$ م / (دقيقة)^2 التعجيل

مثال24 يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $s(t) = t^2 - 20t + 120$ حيث يقاس البعد بالكيلو مترات والزمن بالساعة. احسب :

1) السرعة بعد خمس ساعات .

2) بُعده عندما تصبح سرعته صفرا.

الحل

$1)v(t) = \acute{s}(t) = 2t - 20$

$v(5) = 2 \times 5 - 20 = -10$ كم / ساعة (السرعة)

$2)2t - 20 = 0 \Rightarrow t = 10$ ساعة

$s(10) = 10^2 - 20(10) + 120$

$= 100 - 200 + 120 = 20$ كم البُعد

مثال25 يتحرك جسم على خط مستقيم وحسب العلاقة $s(t) = \sqrt{2t+1}$ اوجد الزمن الذي يستغرقه حتى تصبح سرعته $\frac{1}{3}$ م / ثا .

الحل

$s(t) = (2t+1)^{\frac{1}{2}}$

$v(t) = \acute{s}(t) = \frac{1}{\cancel{2}}(2t+1)^{\frac{-1}{2}} \times \cancel{2}$

$v(t) = \frac{1}{(2t+1)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{(2t+1)^{\frac{1}{2}}}$

$(2t+1)^{\frac{1}{2}} = 3$ بالتربيع

$2t + 1 = 9 \Rightarrow t = 4$ ثانية

مثال 26 قذف جسم نحو الاعلى من سطح الارض بأزاحة معطاة وفق العلاقة $s(t) = 96t - 16t^2$ حيث ان $s(t)$ الازاحة بالامتار ، t بالثواني . احسب :

1) سرعة الجسم بعد ثانيتين .

2) متى يصل الجسم الى اعلى نقطة ؟

الحل 1)

$s(t) = 96t - 16t^2$

$v(t) = \acute{s}(t) = 96 - 32t$

$\acute{s}(2) = 96 - 32 \times 2 = 32$ م / ثا السرعة بعد 2 ثانية

2) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عندما تصبح سرعته = صفر

$v(t) = 96 - 32t$

$0 = 96 - 32t$

$32t = 96 \Rightarrow t = \frac{96}{32} = 3$ ثانية

مثال 27 اذا تحرك الجسم وفق العلاقه $s(t)=t^3-6t+18t+12$ حيث $s(t)$ بالامتار ، t الزمن بالثانيه احسب بعد الجسم عن نقطة بداية الحركه وسرعته عندما يصبح تعجيله صفرا .

الحل :ـ

$$s(t)=t^3-6t^2+18t+12$$
$$v(t)=s'(t)=3t^2-12t+18$$
$$v'(t)=6t-12$$

$$6t-12=0 \Rightarrow t=\frac{12}{6}=2 \quad \text{ثانية}$$

$$s(2)=2^3-6(2)^2+18(2)+12$$
$$=8-24+36+12=32 \quad \text{متر}$$ بعد الجسم عن نقطة بداية الحركة

$$v(2)=3(2)^2-12(2)+18$$

$$=12-24+18=6 \quad \text{متر / ثا}$$ السرعة

مثال 28 لنفرض ان دالة الكلفة الكلية لانتاج سلعة ما $c(x)=3x^2-60x+1200$ جد :

a) دالة الكلفة الحدية .

b) دالة معدل الكلفة .

c) دالة معدل الكلفة الحدية .

d) حجم الانتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة .

الحل

a) $MC=c'(x)=6x-60$ دالة الكلفة الحدية

b) $AC=\dfrac{c(x)}{x}=\dfrac{3x^2-60x+1200}{x}$

$=3x-60+\dfrac{1200}{x}$ دالة معدل الكلفة

c) $\dfrac{d}{dx}(AC)=\dfrac{d}{dx}\left(3x-60+\dfrac{1200}{x}\right)=3-\dfrac{1200}{x^2}$ دالة معدل الكلفة الحدية

لايجاد حجم الانتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة نجعل المشتقة الاولى لـ AC صفراً

$$3-\frac{1200}{x^2}=0 \Rightarrow 3x^2-1200=0 \Rightarrow x=20$$

والكلفة الكلية

$$c(20)=3(20)^2-60(20)+1200=1200$$

تمارين (3-3)

1- جد معادلة مماس المنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 5$ عند $x = 0$.

الحل :--- نجد أولا نقطة التماس وذلك بتعويض قيمة x فنحصل على $f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 9(0) + 5 = 5$

أي إن نقطة التماس هي $(0,5)$ ثم نجد بعد ذلك الميل $f'(x) = 3x^2 - 6x + 9 \Rightarrow f'(0) = 3(0)^2 - 6(0) + 9 = 9$

معادلة المماس هي

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 9(x - 0) \Rightarrow y - 9x - 5 = 0$$

2- جد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للمنحني $y = (x-3)^3$ عند $x = 2$.

الحل :--- نجد أولا نقطة التماس وذلك بتعويض قيمة x فنحصل على $f(2) = (2-3)^3 = -1$

أي إن نقطة التماس هي $(2,-1)$ ثم نجد بعد ذلك الميل $f'(x) = 3(x-3)^2 \Rightarrow f'(2) = 3(2-3)^2 = 3$

معادلة المماس هي

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = 3(x - 2) \Rightarrow y + 1 - 3x + 6 = 0 \Rightarrow y - 3x + 7 = 0$$

معادلة العمود على المماس هي

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = \frac{-1}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y + 3 = -x + 2 = 0 \Rightarrow 3y + x + 1 = 0$$

3- جد معادلة المماس للمنحني $f(x) = x^3 - 2x + \frac{3}{x^2+2}$ عند $x = -1$.

الحل :--- نجد أولا نقطة التماس وذلك بتعويض قيمة x فنحصل على

$$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + \frac{3}{(-1)^2 + 2} = -1 + 2 + 1 = 2$$

أي إن نقطة التماس هي $(-1,2)$ ثم نجد بعد ذلك الميل

$$f'(x) = 3x^2 - 2 + \frac{-3(2x)}{(x^2+2)^2} \Rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 - 2 + \frac{-3(2\times -1)}{((-1)^2+2)^2} = 1 + \frac{6}{9} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$$

معادلة المماس هي

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \frac{5}{3}(x + 1) \Rightarrow 3y - 6 = 5x + 5 = 0 \Rightarrow 3y - 5x - 11 = 0$$

4- جد النقط على المنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ بحيث يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات.

الحل :ـ إذا كان المماس يوازي محور السينات فهذا يعني أن المشتقة تساوي صفر

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 .... \div 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3,..x = -1$$

$$f(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 4 = 27 - 27 - 27 + 4 = -23 .... \therefore (3,-23)$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 4 = -1 - 3 + 9 + 4 = -9 ...... \therefore (-1,-9)$$

5- جد النقط على المنحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ عندما يكون مماس المنحني يوازي المستقيم $2x - y = 0$

الحل :ـ إذا كان المماس يوازي المستقيم فهذا يعني أن ميل المستقيم يساوي ميل المنحني وميل المنحني يعني المشتقة أما ميل المستقيم فهو يساوي (ناقص معامل x على معامل y)

$$m = \frac{-2}{-1} = 2 ....., f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow 2x - 4 = 2 \Rightarrow 2x = 6 .... \therefore x = 3$$

$$f(3) = (3)^2 - 4(3) + 5 = 9 - 12 + 5 = 2 ...... \therefore (3,2)$$

6- جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث ان بعده بالامتار والزمن بالثواني معطى بالعلاقة

$s(t) = \sqrt{2t^2 + 18}$ احسب بعده عندما تصبح السرعة 1 متر / ثا .

الحل :ـ

$$v(t) = \frac{4t}{2\sqrt{2t^2 + 18}} \Rightarrow 1 = \frac{2t}{\sqrt{2t^2 + 18}} \Rightarrow 2t = \sqrt{2t^2 + 18} \Rightarrow 4t^2 = 2t^2 + 18$$

$$4t^2 - 2t^2 = 18 \Rightarrow 2t^2 = 18 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3$$

$$s(3) = \sqrt{2(3)^2 + 18} = \sqrt{18 + 18} = \sqrt{36} = 6.m$$

7- اذا تحرك جسم وفق العلاقة $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 7$ حيث ان s بعده بالامتار، t الزمن بالثواني احسب

a) بعد الجسم من نقطة بدايه الحركة عندما تصبح سرعته صفراً .

b) بعد الجسم من نقطة بدايه الحركة عندما يصبح التعجيل صفراً .

الحل :ـ

$$a).v(t) = 3t^2 - 12t + 9 \Rightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0..........\div 3$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-1) = 0 \Rightarrow t = 3,..t = 1$$

$$s(3) = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 7 = 27 - 56 + 27 + 7 = 5.m$$

$$s(1) = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 7 = 1 - 6 + 9 + 7 = 11.m$$

$$b).v'(t) = 6t - 12 \Rightarrow 0 = 6t - 12 \Rightarrow t = 2$$

$$s(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 9(2) + 7 = 8 - 24 + 18 + 7 = 9.m$$

8- لنفرض ان الكلفه الكليه لصنع x من وحدات سلعة ماهي $c(x) = 1500 + 30x + \frac{20}{x}$

جد الكلفه الحديه واحسب الكلفه الحديه عندما يكون عدد الوحدات المصنوعة 50.

الحل :ـ

الكلفة الحدية $MC = c'(x) = 30 - \frac{-20}{x^2} = 30 + \frac{20}{x^2}$

عندما يكون $x = 50$ تصبح $MC = c'(50) = 30 + \frac{20}{(50)^2} = 30 + 0.008 = 30.008$

9- لتكن دالة الكلفه الكليه $c(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ جد دالة الكلفة الحدية ، دالة معدل الكلفة الكلية.

الحل :ـ

الكلفة الحدية $MC = c'(x) = x - 2$

لكي نجد دالة معدل الكلفة الكلية يجب أولا القسمة على x ثم نشتق الدالة

$$AC = \frac{c(x)}{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5}{x} = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{5}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(AC) = \frac{1}{2} - \frac{5}{x^2}$$

[3-7] النهايات العظمى و الصغرى

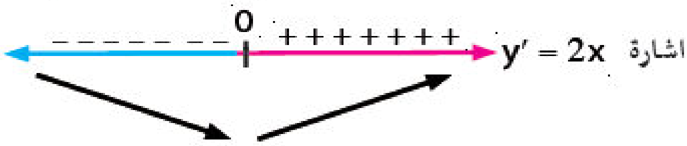
التزايد والتناقص للدالة

مثال -1- لتكن $y = f(x) = x^2$. جد مناطق التزايد والتناقص

الحل

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$



$\because f'(x) > 0, \forall x > 0$

$\therefore \{x : x > 0\}$ f متزايدة في

$\because f'(x) < 0, \forall x < 0$

$\therefore \{x : x < 0\}$ f متناقصة في

مثال -2- جد مناطق التزايد والتناقص لكل من الدالتين الاتيتين :

a) $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

الحل

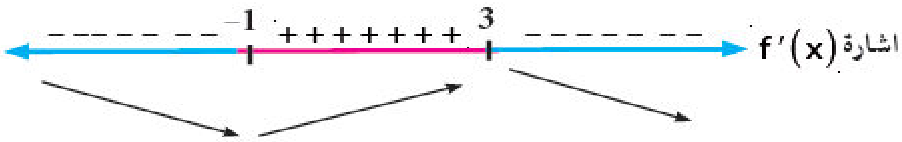
a) $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3 \Rightarrow f'(x) = 9 + 6x - 3x^2$

$0 = 9 + 6x - 3x^2$

$0 = -3(x^2 - 2x - 3)$

$0 = (x-3)(x+1) \Rightarrow x = 3, x = -1$

نختبر على خط الأعداد إشارة المشتقة الأولى بالتعويض بقيم مجاورة للعددين : $x = 3, x = -1$

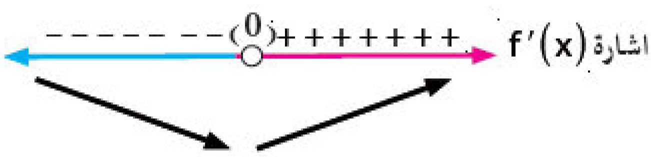


f متناقصة : في $\{x : x < -1\}, \{x : x > 3\}$

f متزايدة : في الفترة المفتوحة $(-1, 3)$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(x)$ غير معرفه اذا كانت $x = 0$, اي $x = 0$ عدد حرج



f متزايدة في $\{x : x > 0\}$

f متناقصة في $\{x : x < 0\}$

مثال 29 جد النقاط الحرجة للدالة $f(x) = x^3 - 3x + 6$

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

$f(1) = 1^3 - 3(1) + 6 = 4 \Rightarrow (1,4)$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 6$

$= -1 + 3 + 6 = 8 \Rightarrow (-1,8)$

النقاط الحرجة $(-1,8),(1,4)$

مثال 30 لكل من الدوال الاتية جد ان وجدت النقاط الحرجة ومناطق التزايد ومناطق التناقص

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

الحل

نجد $f'(x)$ $\quad f'(x) = 2x - 4$

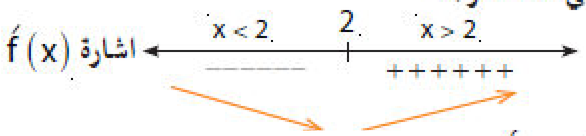
نجعل $f'(x) = 0$

$\therefore 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

نجد احداثيها الصادي y

$f(2) = y = 2^2 - 4(2) + 3 \Rightarrow y = -1$

$\therefore$ النقطة $(2,-1)$ هي نقطة حرجة



1) الدالة متزايدة في $\{x : x \in R \ , x > 2\}$

2) الدالة متناقصة في $\{x : x \in R \ , x < 2\}$

2) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 3$

نجعل $f'(x) = 0$

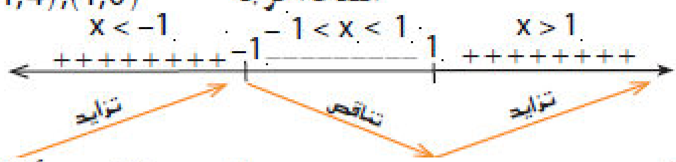
$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

$f(1) = 1^3 - 3(1) + 2 = 0$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2$

$= -1 + 3 + 2 = 4$

النقاط الحرجة $(-1,4),(1,0)$



الدالة متزايدة في

1) $\{x : x \in R , x > 1\}$

2) $\{x : x \in R , x < -1\}$

الدالة متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

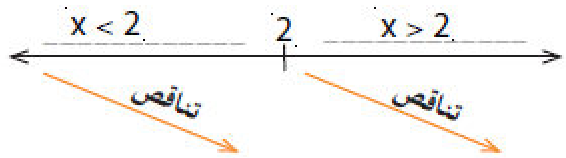
الحل

3) $f(x)=(2-x)^3$

$$f'(x)=3(2-x)^2(-1)$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow -3(2-x)^2=0$$
$$\Rightarrow (2-x)^2=0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2$$
$$f(2)=(2-2)^3=0$$

$\therefore$ النقطة $(2,0)$ نقطة حرجة

اشارة $f'(x)$



نلاحظ الدالة متناقصة في

1) $\{x : x \in R, x > 2\}$

2) $\{x : x \in R, x < 2\}$

ايجاد النهايات العظمى أو الصغرى

لكي نجد القيم العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص نتبع ما يلي

١) نشتق الدالة

٢) نساوي المشتقة بالصفر ونجد قيمة x

٣) نعوض قيمة x في الدالة الأصلية لكي نجد قيمة y

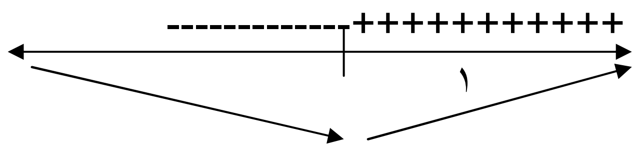
٤) لتحديد القيم العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص نجد إشارة المشتقة على خط الإعداد حيث الإشارة الموجبة تعني تزايد الإشارة السالبة تعني تناقص

مثال : جد النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^2-2x$

الحل :

$$f'(x) = 2x-2 \rightarrow 2x-2 = 0 \rightarrow x = 1$$
$$f(1) = (1)^2 -2(1) = -1$$

إذا النقطة هي $(1,-1)$ إشارة $f'(x)$



$f'(0) = 2(0)-2 = -2 \quad f'(2) = 2(2)-2 = 2$

تم الانتقال من الإشارة السالبة إلى الإشارة الموجبة لذلك $(1,-1)$ تمثل نهاية صغرى محلية

مناطق التزايد = $\{x : x \in R\ x > 1\}$

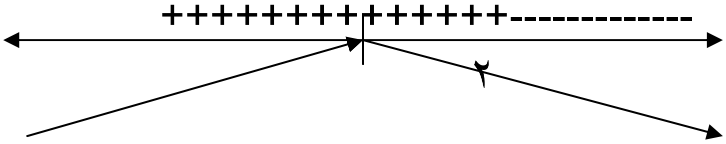
مناطق التناقص = $\{x : x \in R\ x < 1\}$

مثال : جد النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) =4x - x^2$

الحل :

$$f'(x) = 4- 2x \rightarrow 4- 2x = 0 \rightarrow x = 2$$
$$f(2) =4(2)- (2)^2 = 4$$

إذا النقطة هي (2,4) إشارة $f'(x)$



$f'(1) = 4 - 2(1) = 2 \quad f'(3) = 4 - 2(3) = -2$

تم الانتقال من الإشارة الموجبة إلى الإشارة السالبة لذلك (2,4) تمثل نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد = $\{ x : x \in R \ x < 2\}$

مناطق التناقص = $\{ x : x \in R \ x > 2\}$

مثال : جد النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^3 - 12x$

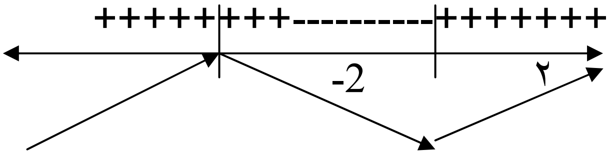
الحل :

$f'(x) = 3x^2 - 12 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2 \ , \ x = -2$

$f(2) = (2)^3 - 12(2) = -16$

$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = 16$

إذا النقاط هي (2,-16) , (-2,16) إشارة $f'(x)$



$f'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 15 \ , \ f'(0) = 3(0)^2 - 12 = -12 \ , \ f'(3) = 3(3)^2 - 12 = 15$

إذا (2,-16) تمثل نهاية صغرى محلية والنقطة (-2,16) تمثل نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد = $\{ x : x \in R \ x < -2\}$

مناطق التزايد = $\{ x : x \in R \ x > 2\}$

مناطق التناقص الفترة (-2,2)

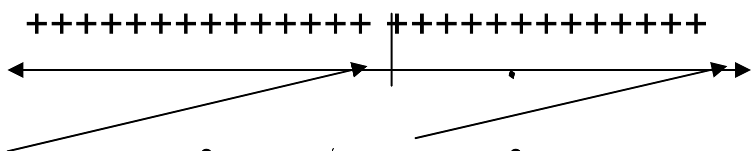
مثال : جد النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^3 + 2$

الحل :

$f'(x) = 3x^2 \rightarrow 3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

$f(0) = (0)^3 + 2 = 2$

إشارة $f'(x)$



$f'(-1) = 3(-1)^2 = 3 \ , \ f'(1) = 3(1)^2 = 3$

إذا النقطة (0,2) هي نقطة حرجة والدالة في حالة تزايد

مثال : جد النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

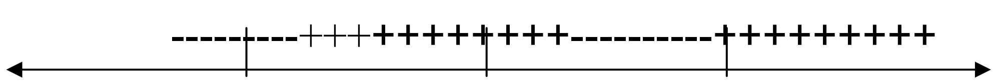
الحل : $f'(x) = 4x^3 - 4x \rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

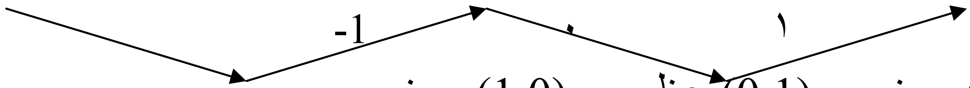
$x = 0 \ , \ x = 1 \ , \ x = -1$

$f(0) = (0)^4 - 2(0)^2 + 1 = 1 \ , \ f(1) = (1)^4 - 2(1)^2 + 1 = 0 \ , \ f(1) = (1)^4 - 2(1)^2 + 1 = 0$

إذا النقاط هي (0,1) , (-1,0) , (1,0)

إشارة $f'(x)$





إذا النقاط (-1,0) صغرى (0,1) عظمى (1,0) صغرى

مثال 31 اذا كان $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ جد نقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت

الحل

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 6x - 9$

نجعل $\acute{f}(x) = 0$

$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$x = 3, x = -1$

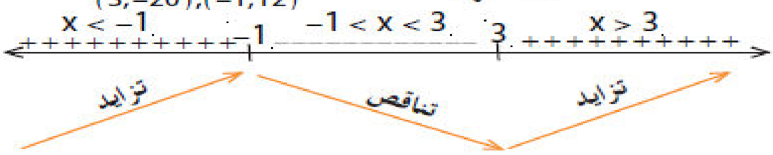
$f(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 7$

$\quad = 27 - 27 - 27 + 7 = -20$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 7$

$\quad = -1 - 3 + 9 + 7 = 12$

نقاط حرجة $(3,-20),(-1,12)$



الدالة متزايدة في $1)\{x : x \in R, x > 3\}$

$2)\{x : x \in R, x < -1\}$

ومتناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,3)$

∴ نقطة نهاية صغرى $(3,-20)$

∴ نقطة نهاية عظمى $(-1,12)$

مثال 32 لتكن $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ جد نقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت.

الحل

$\acute{f}(x) = 4x^3 - 4x$

$\acute{f}(x) = 0$

$4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$

$x = 0, x = 1, x = -1$

$f(0) = 0^4 - 2(0)^2 + 1 = 1$

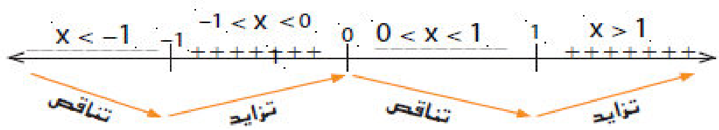
$f(1) = 1^4 - 2(1)^2 + 1 = 0$

$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 1 = 0$

النقطة الحرجة $(0,1)$

النقطة الحرجة $(1,0)$

النقطة الحرجة $(-1,0)$



الدالة متزايدة في $1)\{x : x \in R, x > 1\}$

وفي الفترة المفتوحة $2)(-1,0)$

الدالة متناقصة في $1)\{x : x \in R, x < -1\}$

وفي الفترة المفتوحة $2)(0,1)$

$\therefore$ النقطتان $(1,0)$، $(-1,0)$ نهاية صغرى محلية

$(0,1)$ نهاية عظمى محلية

مثال 33 لتكن $f(x) = x^3(-4+x)$ جد نقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت.

الحل

$$f(x) = -4x^3 + x^4$$
$$f'(x) = -12x^2 + 4x^3$$
$$f'(x) = 4x^2(-3+x)$$

نجعل $f'(x) = 0$

$$4x^2(-3+x) = 0$$
$$4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$-3 + x = 0 \Rightarrow x = 3$$

نعوض في المعادلة الاصلية

$f(0) = 0^3(-4+0) = 0$ نقطة حرجة $(0,0)$

$f(3) = 3^3(-4+3) = -27$ نقطة حرجة $(3,-27)$

اشارة $f'(x)$: $x < 0$ ‎ - - - - ‎ 0 ‎ $0 < x < 3$ ‎ - - - - ‎ 3 ‎ $x > 3$ ‎ + + + + + + + +

تناقص ‎ تناقص ‎ تزايد

الدالة متزايدة في $\{x : x \in R, x > 3\}$

الدالة متناقصة في $1)\{x : x \in R, x < 0\}$

وفي الفترة المفتوحة $2)(0,3)$

$\therefore$ النقطة $(3,-27)$ نهاي صغرى محلية

النقطة $(0,0)$ نقطة حرجة وليست نهاية

الدالة لاتمتلك نهاية عظمى

مثال -3- جد نقط النهايات العظمى والصغرى المحلية للدالة f في حالة وجودها اذا علمت أن :

a) $f(x) = 1 + (x-2)^2$

b) $f(x) = 1 - (x-2)^2$

c) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

الحل :-

$$a)\ f(x) = 1 + (x-2)^2$$
$$\Rightarrow f'(x) = 2(x-2)$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$f(2) = 1 + (2-2)^2 = 1$$

اشارة $f'(x)$: - - - - - - - - 2 + + + + + +

تناقص ‎ تزايد

f متزايدة في $\{x : x > 2\}$

f متناقصة في $\{x : x < 2\}$

$\therefore$ النقطة $(2, f(2)) = (2,1)$ تمثل نقطة نهاية صغرى محلية .

$$b)\ f(x) = 1 - (x-2)^2$$
$$\Rightarrow f'(x) = -2(x-2)$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=2$

$f(2)=1-(2-2)^2=1$

$+ + + + + + + \; 2 \; - - - - - - -$ اشارة $f'(x)$

f متزايدة في $\{x : x<2\}$

f متناقصة في $\{x : x>2\}$

$\therefore$ النقطة $(2,1)$ تمثل نقطة نهاية عظمى المحلية

$c)\; f(x)=x^3-9x^2+24x$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2-18x+24$

$f'(x)=0$

$\Rightarrow 3(x^2-6x+8)=0$

$\Rightarrow 3(x-4)(x-2)=0$

$\Rightarrow x=4 \quad , \quad x=2$

$f(4)=16 \quad , \quad f(2)=20$

$+ + + + + + \; 2 \; - - - - - - - \; 4 \; + + + + + +$ اشارة $f'(x)$

تزايد   تناقص   تزايد

f متزايدة في $\{x : x>4\}$ ، $\{x : x<2\}$

f متناقصة في الفترة المفتوحة $(2,4)$

نقطة النهاية العظمى المحلية $(2,20)$

نقطة النهاية الصغرى المحلية $(4,16)$

مثال : إذا كانت الدالة $f(x) = x^2+ax+3$ تمتلك نقطة نهاية صغرى محلية عند $x = 1$ جد قيمة $a \in R$

الحل: نُلاحظ إن الدالة تمتلك نقطة نهاية صغرى أي إن المشتقة الأولى تساوي صفر عند $x=1$

$f'(x) = 2x+a \rightarrow 2x+a = 0 \rightarrow 2(1)+a = 0 \rightarrow a = -2$

مثال : إذا كانت الدالة $f(x) = 3+bx+cx^2$ تمتلك نقطة حرجة $(1,4)$ جد قيمتي كل من $c, b \in R$

الحل : $(1,4)$ تنتمي إلى الدالة أي بمعنى تحقق معادلة الدالة لذلك نعوض عن قيم كل من x , y فنحصل على

$3+b(1)+c(1)^2 = 4 \rightarrow 3+b+c = 4 \rightarrow b+c = 1 \quad$ -------(1)

$(1,4)$ نقطة حرجة أي المشتقة الأولى تساوي صفر

$f'(x) = b+2cx \rightarrow b+2cx = 0 \rightarrow b+2c(1) = 0 \rightarrow b+2c = 0 \rightarrow b=-2c$ -------(2)

نعوض (٢) في (١) فنحصل على

$-2c+c = 1 \rightarrow c = -1 \rightarrow b = -2(-1) = 2$

مثال : إذا كانت الدالة $f(x) = x^3+bx^2+cx+1$ تمتلك نقطة نهاية عظمى هي $(-1,2)$ جد قيمتي كل من $c, b \in R$

الحل : $(-1,2)$ تنتمي إلى الدالة أي بمعنى تحقق معادلة الدالة لذلك نعوض عن قيم كل من x , y فنحصل على

$(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)+1 = 2 \rightarrow -1+b-c+1= 2 \rightarrow b - c = 2$------(1)

$f'(x) = 3x^2+2bx+c \rightarrow 3(-1)^2+2b(-1)+c = 0 \rightarrow c = 2b-3$ ------(2)

$b-(2b-3) = 2 \rightarrow b-2b+3 = 2 \rightarrow -b = 2-3 \rightarrow b = 1 \rightarrow c = 2(1)-3 = -1$

مثال 34

اذا كانت $f(x) = x^3 + ax + 5$ لها نقطة نهاية محلية عند $x = 1$ جد قيمة (a) وبين نوع النهاية .

الحل

$$\acute{f}(x) = 3x^2 + a \Rightarrow 3x^2 + a = 0$$
$$\Rightarrow 3(1)^2 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

لمعرفة نوع النهاية

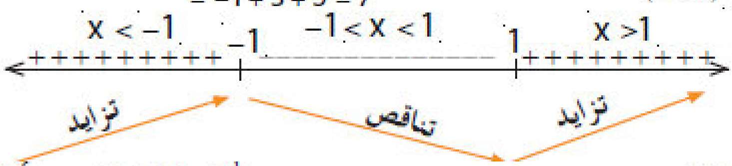
$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$\therefore$ النقطة الحرجة $(1,3)$

$$f(1) = 1^3 - 3(1) + 5 = 3$$
$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 5$$
$$= -1 + 3 + 5 = 7$$

النقطة الحرجة $(-1,7)$

اشارة $\acute{f}(x)$



الدالة متزايدة في

$1)\{x : x \in R , x > 1\}$

$2)\{x : x \in R , x < -1\}$

الدالة متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

$\therefore$ النقطة $(-1,7)$ نهاية عظمى محلية

النقطة $(1,3)$ نهاية صغرى محلية

مثال 35

اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx$ وكانت $f(x)$ تمتلك نهاية محلية عند النقطة $(1,-2)$ فما قيمة كل من $a,b \in R$ وما نوع هذه النهاية ؟

الحل

$$f(x) = ax^3 + bx$$
$$\acute{f}(x) = 3ax^2 + b$$
$$\acute{f}(x) = 0$$

$x = 1$ نعوضها في $\acute{f}(x)$

$$3a(1)^2 + b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots ①$$

النقطة $(1,-2)$ تحقق معادلة الدالة $f(x)$

$$f(x) = ax^3 + bx \Rightarrow -2 = a(1)^3 + b(1)$$
$$\Rightarrow -2 = a + b \ldots\ldots\ldots\ldots ②$$

$$3a + b = 0$$
$$a + b = -2$$

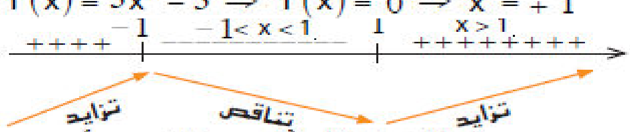
بالطرح

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

نعوض باحدى المعادلتين ولتكن ①

$$3(1) + b = 0 \Rightarrow b = -3$$
$$f(x) = x^3 - 3x$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow \acute{f}(x) = 0 \Rightarrow x = \mp 1$$

اشارة $\acute{f}(x)$



الدالة متزايدة في $\{x : x \in R , x > 1\}$

الدالة متناقصة في $\{x : x \in R , -1 < x < 1\}$

$\therefore$ النقطة $(1 , -2)$ نهاية صغرى محلية

تمارين (3-4)

1- جد نقطة النهايات العظمى أو الصغرى المحلية لكل من الدوال الاتية :

$a)\ f(x) = x^4 - 1$

$b)\ f(x) = x^3$

$c)\ f(x) = (x-1)^3$

$d)\ f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

$e)\ f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

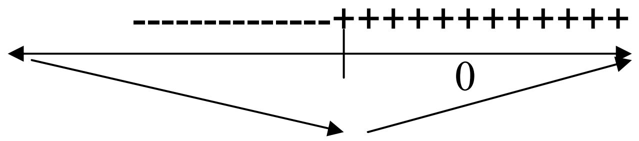
$f)\ f(x) = 5 + 4x^3 - x^4$

$g)\ f(x) = 3x^4 + 4x^3$

الحل :-

$a).f'(x) = 4x^3 \Rightarrow 4x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^4 - 1 = -1..\therefore (0,-1)$

إذا النقطة هي (0,-1) نهاية صغرى   إشارة $f'(x)$



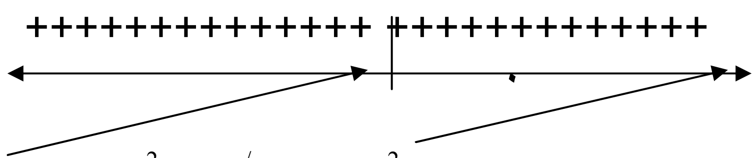
$f'(-1) = 4(-1)^3 = -4 \quad f'(2) = 4(2)^3 = 32$

مناطق التزايد = $\{x : x \in R\ x > 1\}$

مناطق التناقص = $\{x : x \in R\ x < 1\}$

$b).f'(x) = 3x^2 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 = 0.\therefore (0,0)$

إشارة $f'(x)$

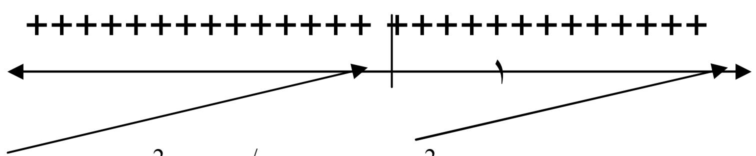


$f'(-1) = 3(-1)^2 = 3\ ,\ f'(1) = 3(1)^2 = 3$

إذا النقطة (0,2) هي نقطة حرجة والدالة في حالة تزايد

$c).f'(x) = 3(x-1)^2 \Rightarrow 3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1\, f(1) = (1-1)^3 = 0.\therefore (1,0)$

إشارة $f'(x)$



$f'(0) = 3(0-1)^2 = 3\ ,\ f'(2) = 3(2-1)^2 = 3$

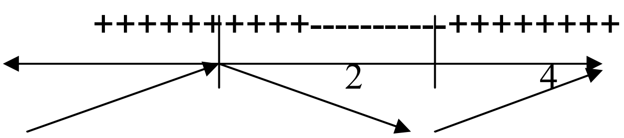
إذا النقطة (1,0) هي نقطة حرجة والدالة في حالة تزايد

$b).f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0......\div 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-4)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 4...,x = 2 \Rightarrow f(4) = 4^3 - 9(4)^2 + 24(4) = 64 - 144 + 96 = 16.\therefore (4,16)$

$f(2) = 2^3 - 9(2)^2 + 24(2) = 8 - 36 + 48 = 20.....\therefore (2,20)$

إذا النقاط هي (2,20) , (4,16)   إشارة $f'(x)$



$f'(5) = + , f'(0) = + \quad , f'(3) = -$

إذا (4,16) تمثل نهاية صغرى محلية والنقطة (2,20) تمثل نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد = $\{x : x \in R \; x < 2\}$ مناطق التزايد = $\{x : x \in R \; x > 4\}$

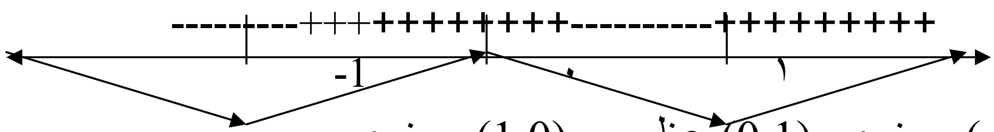
مناطق التناقص الفترة (2,4)

$e).f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0.....\div 4 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^4 - 2(0)^2 - 3 = -3..\therefore (0,-3)....,x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^4 - 2(1)^2 - 3 = -4....\therefore (1,-4)$

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = -4....\therefore (-1,-4)$

إشارة $f'(x)$



إذا النقاط (-1,0) صغرى (0,1) عظمى (1,0) صغرى

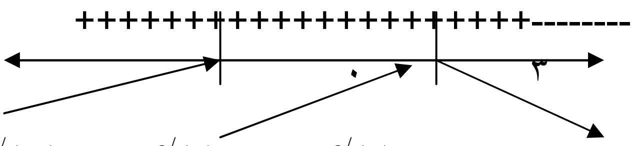
مناطق التزايد = (-1,0) مناطق التزايد = $\{x : x \in R \; x > 1\}$

مناطق التناقص الفترة (0,1) مناطق التناقص = $\{x : x \in R \; x < -1\}$

$f).f'(x) = 12x^2 - 4x^3 \Rightarrow 12x^2 - 4x^3 = 0.....\div 4 \Rightarrow 3x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(3-x) = 0$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 5 + 4(0)^3 - 0^4 = 5..\therefore (0,5)....,x = 3 \Rightarrow f(3) = 5 + 4(3)^3 - 3^4 = 32....\therefore (3,32)$

إذا النقاط هي (0,5) , (3,32) إشارة $f'(x)$



$f'(-1) = + , f'(1) = + \quad , f'(4) = -$

إذا (0,5) تمثل نقطة حرجة والنقطة (3,32) تمثل نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد = $\{x : x \in R \; x < 0\}$

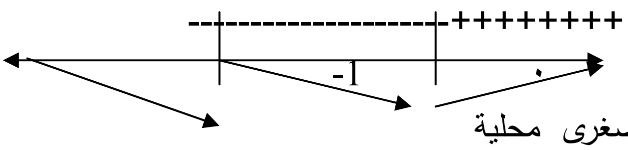
مناطق التزايد الفترة (-2,2)

مناطق التناقص = $\{x : x \in R \; x > 3\}$

$g).f'(x) = 12x^3 + 12x^2 \Rightarrow 12x^3 + 12x^2 = 0......\div 12 \Rightarrow x^3 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) = 0$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 3(0)^4 + 4(0)^3 = 0....\therefore (0,0)..x = -1 \Rightarrow f(-1) = 3(-1)^4 + 4(-1)^3 = 3 - 4 = -1 \therefore (-1,-1)$

إذا النقاط هي (0,0) , (-1,-1) إشارة $f'(x)$



إذا (-1,-1) تمثل نقطة حرجة والنقطة (0,0) تمثل نهاية صغرى محلية

مناطق التزايد = $\{x : x \in R \; x > 0\}$

مناطق التناقص = $\{x : x \in R \; x < -1\}$

مناطق التناقص الفترة (-1,0)

2- اذا علمت ان النقطة $(2,1)$ هي نقطة النهاية الصغرى المحلية للدالة $f(x) = a + (x-b)^2$

فجد قيمة كل من $a,b \in R$.

الحل :-

$1 = a + (2-b)^2......(1)...f'(x) = 2(x-b) \Rightarrow 2(2-b) = 0...... \div 2 \Rightarrow 2 - b = 0$

$\therefore b = 2.....(2) \Rightarrow 1 = a + (2-2)^2 \Rightarrow 1 = a$

3- اذا كانت النقطة $(1,4)$ نقطة حرجة للدالة $f(x) = 3 + ax + bx^2$ فما قيمة $a,b \in R$ وما نوع النقطة الحرجة .

الحل :ــ

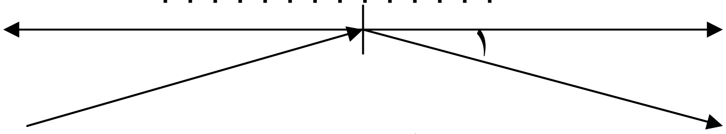
$$4 = 3 + a(1) + b(1)^2 \Rightarrow 1 = a + b......(1)...f'(x) = a + 2bx \Rightarrow a + 2b(x) = 0 \Rightarrow a = -2b.....(2)$$

$$\therefore 1 = -2b + b \Rightarrow 1 = -b \therefore b = -1 \Rightarrow a = -2(-1) = 2$$

أي تصبح المعادلة بالشكل التالي

$$f(x) = 3 + 2x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - 2x$$

++++++++++++++------------ إشارة $f^{/}(x)$



تم الانتقال من الإشارة الموجبة إلى الإشارة السالبة لذلك $(1,4)$ تمثل نهاية عظمى

نقطة الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر

لتكن f دالة فإذا كانت z تنتمي إلى مجال الدالة فان $(z, f(z))$ نقطة انقلاب إذا كانت $f^{//}(z) = 0$ وان النقطة $(z, f(z))$ تفصل التحدب عن التقعر وبالعكس

ملاحظة : قد تكون $f^{//}(z) = 0$ ولكن النقطة $(z, f(z))$ لا تمثل نقطة انقلاب

مثال: جد إن وجدت نقطة الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للمنحني $f(x) = (x-1)^4$

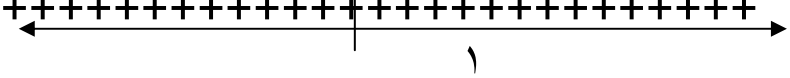
الحل:

$f^{/}(x) = 4(x-1)^3 \rightarrow f^{//}(x) = 12(x-1)^2 \rightarrow 12(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

$f(1) = (1-1)^4 = 0$

النقطة هي $(1,0)$ قد تكون نقطة انقلاب لتحديد ذلك نجد إشارة المشتقة الثانية على خط الأعداد

++++++++++++++++++++++++++++++ إشارة المشتقة الثانية



$f^{//}(2) = 12(2-1)^2 = 12$

$f^{//}(-1) = 12(-1-1)^2 = 24$

نُلاحظ أنهُ لم تتغير إشارة المشتقة الثانية حول ١ لذلك $(1,0)$ لا تمثل نقطة انقلاب والدالة في حالة تقعر

مثال: جد إن وجدت نقطة الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للمنحني $f(x) = x^3+2$

الحل:

$f^{/}(x) = 3x^2 \rightarrow f^{//}(x) = 6x \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$

$f(0) = (0)^3+2 = 2$

النقطة هي $(0,2)$ قد تكون نقطة انقلاب لتحديد ذلك نجد إشارة المشتقة الثانية على خط الأعداد

إشارة المشتقة الثانية $\longleftarrow$ -------------+++++++++++++ $\longrightarrow$

٠

$f^{//}(1) = 6(1) = 6$

$f^{//}(-1) = 6(-1) = -6$

نُلاحظ أن النقطة (0,2) تفصل بين الإشارة السالبة والموجبة لذلك تمثل نقطة انقلاب

مناطق التحدب = $\{ x : x \in R \; x < 0\}$

مناطق التقعر = $\{ x : x \in R \; x > 0\}$

مثال: جد إن وجدت نقطة الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للمنحني $f(x) = x^4-4x^3$

الحل:

$f^{/}(x) = 4x^3-12x^2 \rightarrow f^{//}(x) = 12x^2-24x \rightarrow 12x^2-24x = 0 \rightarrow x^2-2x = 0$

$x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0 \;\;,\;\; x = 2$

$f(0) = (0)^4-4(0)^3 = 0$

$f(2) = (2)^4-4(2)^3 = -16$

إشارة المشتقة الثانية $\longleftarrow$ +++++++++++---------+++++++++ $\longrightarrow$

٠ ٢

$f^{//}(3) = (3)^2-2\,(3) = 3$

$f^{//}(1) = (1)^2-2\,(1) = -1$

$f^{//}(-1) = (-1)^2-2\,(-1) = 3$

نُلاحظ أن النقاط (2,-16) (0,0) تفصل بين الإشارة السالبة والموجبة لذلك تمثل نقاط انقلاب

مناطق التقعر = $\{ x : x \in R \; x < 0\}$

مناطق التقعر = $\{ x : x \in R \; x > 2\}$

مناطق التحدب = $\{(0,2)\}$

مثال: جد إن وجدت نقطة الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للمنحني $f(x) = x^3-3x^2-9x+5$

الحل:

$f^{/}(x) = 3x^2-6x-9 \rightarrow f^{//}(x) = 6x-6 \rightarrow 6x-6 = 0 \rightarrow x-1 = 0 \rightarrow x = 1$

$f(1) = (1)^3-3(1)^2-9(1)+5 = -6$

إشارة المشتقة الثانية $\longleftarrow$ -------------+++++++++++++++ $\longrightarrow$

١

$f^{//}(2) = 6(2)-6 = 6 \quad f^{//}(0) = 6(0)-6 = -6$

نُلاحظ أن النقطة (1,-6) تفصل بين الإشارة السالبة والموجبة لذلك تمثل نقطة انقلاب

مناطق التحدب = $\{ x : x \in R \; x < 1\}$

مناطق التقعر = $\{ x : x \in R \; x > 1\}$

مثال -2- جد نقطة الانقلاب للمنحني: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$

الحل

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$$
$$f'(x)=6x^2-6x-12$$
$$f''(x)=12x-6$$
$$f''(x)=0$$
$$12x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$
$$f(\frac{1}{2})=-\frac{11}{2}$$

اشارة $f''(x)$: $- - - - - - -$ $\frac{1}{2}$ $+ + + + + +$

تحدب | تقعر

$\therefore$ النقطة $(\frac{1}{2},-\frac{11}{2})$ هي نقطة انقلاب

مثال -3- جد مناطق التحدب والتقعر ونقط الانقلاب إن وجدت للدوال التالية:

a) $f(x)=4x^3-x^4$

b) $f(x)=x+\frac{1}{x}, x\neq 0$

c) $h(x) = 4-(x+2)^4$

d) $f(x)=3-2x-x^2$

الحل

a) $f(x)=4x^3-x^4$

$$f'(x)=12x^2-4x^3$$
$$f''(x)=24x-12x^2$$

$$f''(x)=0$$
$$0=12x(2-x)\Rightarrow$$
$x=0$ ، $x=2$

$f(0)=0$, $f(2)=16$

$(0,0)$, $(2,16)$

اشارة $f''(x)$: $- - - - - -$ 0 $+ + + + + +$ 2 $- - - - - - -$

محدبة | مقعرة | محدبة

$\therefore$ نقطتا الانقلاب هما: $(0,0)$, $(2,16)$

b) $f(x)=x+\frac{1}{x}, x\neq 0$

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$$
$$f''(x)=\frac{2}{x^3}$$

$f''(0)$ غير معرفة

اشارة $f''(x)$: $- - - - - - -$ 0 $+ + + + + +$

محدب | مقعر

f محدبة : في $\{x: x<0\}$

f مقعرة : في $\{x: x>0\}$

لاتوجد نقطة انقلاب لأن 0 لاينتمي لمجال الدالة.

c) $h(x)=4-(x+2)^4$

$h'(x)=-4(x+2)^3$

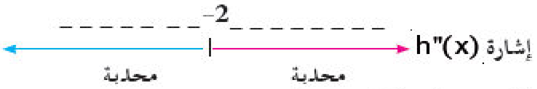
$h''(x)=-12(x+2)^2$

$h''(x)=0 \Rightarrow$

$0=-12(x+2)^2 \Rightarrow x=-2$

$f(-2)=4$

$(-2,4)$



الدالة h محدبة في $\{x: x<-2\}$ و $\{x: x>-2\}$

لاتوجد نقطة انقلاب عند $x=-2$ لأن الدالة محدبة على جهتيها

d) $f(x)=3-2x-x^2$

$f'(x)=-2-2x$

$f''(x)=-2 < 0$

$\therefore$ f الدالة محدبة في R لذا لاتوجد نقطة انقلاب.

مثال 36 جد نقاط الانقلاب للدالة $f(x)=x^2-4x+2$.

الحل

$f(x)=x^2-4x+2$

$f'(x)=2x-4$

$f''(x)=2\neq 0$

$f''(x)=2$ لا توجد نقاط انقلاب لان المنحني مقعر في R

مثال 37 لتكن $f(x)=x^3-3x+2$ جد نقاط الانقلاب

الحل

$f(x)=x^3-3x+2$

$f'(x)=3x^2-3$

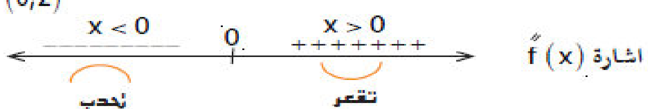
$f''(x)=6x$

$f''(x)=0$ نجعل

$\therefore 6x=0 \Rightarrow x=0$

$f(0)=0^3-3(0)+2=2$

$(0,2)$



منطقة التحدب $\{x: x\in R, x<0\}$

منطقة التقعر $\{x: x\in R, x>0\}$

$\therefore (0,2)$ نقطة انقلاب

تمارين (3-5)

لكل من الدوال الاتية عين ان وجدت نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب :

$1)\ f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

$2)\ f(x) = 3x - x^3$

$3)\ f(x) = x^3 - 3x^2$

$4)\ f(x) = x^5$

$5)\ f(x) = (x-2)^3 + 3$

$6)\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

$7)\ f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

الحل :-

$1).\ f'(x) = 4x - 4 \Rightarrow f''(x) = 4$

لا توجد نقط انقلاب والدالة في حالة تقعر

$2).\ f'(x) = 3 - 3x^2 \Rightarrow f''(x) = -6x \Rightarrow -6x = 0 \therefore x = 0$

$f(0) = 3(0) - (0)^3 = 0 ...(0,0)$

إشارة المشتقة الثانية ++++++++++++++--------------

٠

$f''(2) = -6(2) = -12 \quad f''(-1) = -6(-1) = 6$

(0,0) نقطة انقلاب

مناطق التقعر = $\{x : x \in R\ x < 0\}$

مناطق التحدب = $\{x : x \in R\ x > 0\}$

$3).\ f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \therefore x = 1$

$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 = -2 ...(1,-2)$

إشارة المشتقة الثانية -------------+++++++++++++++

١

$f''(2) = 6(2)-6 = 6 \quad f''(0) = 6(0)-6 = -6$

نُلاحظ أن النقطة (1,-6) تفصل بين الإشارة السالبة والموجبة لذلك تمثل نقطة انقلاب

مناطق التحدب = $\{x : x \in R\ x < 1\}$

مناطق التقعر = $\{x : x \in R\ x > 1\}$

$4).\ f'(x) = 5x^4 \Rightarrow f''(x) = 20x^3 \Rightarrow 20x^3 = 0 \therefore x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \therefore (0,0)$

إشارة المشتقة الثانية -------------+++++++++++++++

0

$f''(1) = 20 \ , \quad f''(-1) = -20$

نُلاحظ أن النقطة (0,0) تفصل بين الإشارة السالبة والموجبة لذلك تمثل نقطة انقلاب

مناطق التحدب = $\{x : x \in R\ x < 1\}$

مناطق التقعر = $\{x : x \in R\ x > 1\}$

$$5).f'(x) = 3(x-2)^2 \Rightarrow f''(x) = 6(x-2) \Rightarrow 6(x-2) = 0 \therefore x = 2$$

$$f(2) = (2-2)^3 + 3 = 3 \ldots \therefore (2,3)$$

إشارة المشتقة الثانية ‎-------------+++++++++++++++

٢

$f^{//}(3) = 6(3\text{-}2) = 6$, $f^{//}(1) = 6(1\text{-}2) = -6$

نُلاحظ أن النقطة (0,0) تفصل بين الإشارة السالبة والموجبة لذلك تمثل نقطة انقلاب

مناطق التحدب = $\{x : x \in R\ x < 2\}$

مناطق التقعر = $\{x : x \in R\ x > 2\}$

$$6).f'(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 - \frac{3}{2} \times 2x \Rightarrow f'(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0 \ldots . \div 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{4}(1)^4 - \frac{3}{2}(1)^2 = \frac{1-6}{4} = \frac{-5}{4} \therefore (\mp 1, \frac{-5}{4})$$

إشارة المشتقة الثانية ‎+++++++++++---------+++++++++

-1 1

مناطق التقعر = $\{x : x \in R\ x < -1\}$

مناطق التقعر = $\{x : x \in R\ x > 1\}$

مناطق التحدب = $\{(-1,1)\}$

$$7).f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 \Rightarrow f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \therefore x = -1$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0 \ldots (-1,0)$$

إشارة المشتقة الثانية ‎-------------+++++++++++++++

-1

نُلاحظ أن النقطة (-1,0) تفصل بين الإشارة السالبة والموجبة لذلك تمثل نقطة انقلاب

مناطق التحدب = $\{x : x \in R\ x < -1\}$

مناطق التقعر = $\{x : x \in R\ x > -1\}$

| ملاحظة للإجابة على أسئلتكم واستفساراتكم يمكنكم الاتصال على الرقم

م \ ٠٧٧٠١٧٣٤٥٦٩ أو على الإميل Ibrahim.ali1972@yahoo.com

[3-9] رسم الدوال

لكي نرسم اي دالة نتبع الخطوات التالية :

1) نجد نقاط التقاطع مع المحورين ان امكن .

2) نعين مناطق التزايد والتناقص ومنها نحدد نوع النقط الحرجة.

3) نعين مناطق التقعر والتحدب ومنها نقط الانقلاب .

4) نجد نقط اضافية اذا احتجنا اليها .

مثال 38 ارسم منحني الدالة $f(x) = x^2 + 4x + 3$

الحل

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

1) التقاطع مع المحورين

نعطي $x = 0$ (تقاطع مع محور الصادات) .

$$f(0) = 0^2 + 4(0) + 3 = 3$$

نقطة التقاطع $(0,3)$ مع محور الصادات

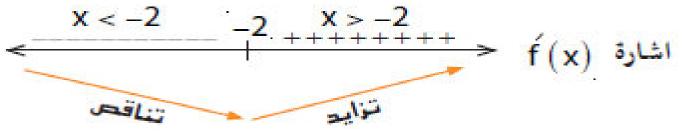
نعطي $f(x) = 0$ (تقاطع مع محور السينات) .

$$\therefore x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$(x+3)(x+1) = 0$$
$$x = -3, x = -1$$

نقاط التقاطع $(-3,0)(-1,0)$ مع محور السينات .

2) النهايات العظمى والصغرى

$$f'(x) = 2x + 4$$
$$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2$$
$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$
$$(-2,-1)$$



منطقة التزايد $\{x : x \in R, x > -2\}$

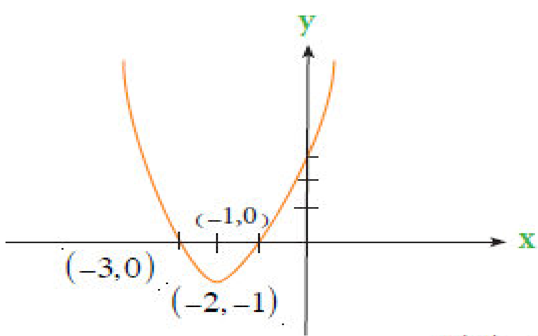
منطقة التناقص $\{x : x \in R, x < -2\}$

$\therefore$ النقطة $(-2,-1)$ نهاية صغرى محلية

نجد $f''(x)$ $f''(x) = 2$

الدالة مقعرة في مجالها و لا توجد نقاط انقلاب

x	y
−3	0
−2	−1
−1	0
0	3



مثال 39 ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x$

الحل

$f(x) = x^3 - 3x$

1) نجد نقط تقاطع المحورين

نعطي $x = 0$

$f(0) = 0^3 - 3(0)$

$\therefore$ نقطة التقاطع $(0,0)$

نعطي $f(x) = 0$

$x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ او $x = \mp\sqrt{3}$

$\therefore$ نقاط التقاطع $(0,0)(\sqrt{3},0)(-\sqrt{3},0)$

2) نجد النهايات العظمى والصغرى

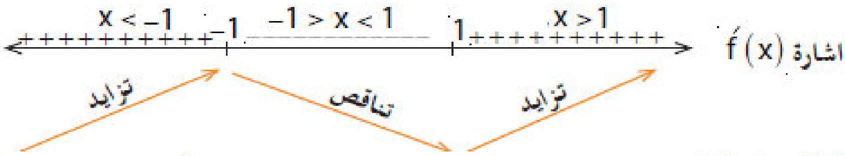
$f'(x) = 3x^2 - 3$

نجعل $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$

$f(1) = 1^3 - 3(1) \Rightarrow f(1) = -2$ نقطة حرجة

$f(1) = (-1)^3 - 3(-1) \Rightarrow f(-1) = 2 \Rightarrow (-1,2)$ نقطة حرجة



$\therefore$ الدالة متزايدة في

$1)\{x : x \in R, x > 1\}$

$2)\{x : x \in R, x < -1\}$

الدالة متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

$\therefore$ النقطة $(1,-2)$ نهاية صغرى محلية

النقطة $(-1,2)$ نهاية عظمى محلية

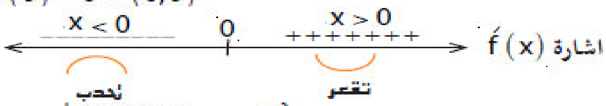
3) نجد نقاط الانقلاب

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0$

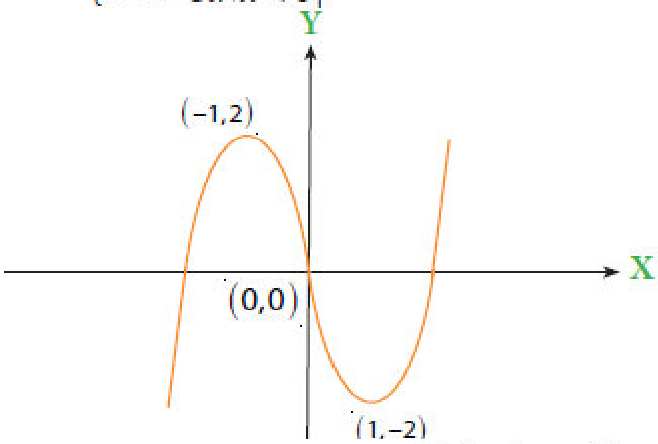
$6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$



مناطق التقعر $\{x : x \in R, x > 0\}$

مناطق التحدب $\{x : x \in R, x < 0\}$



مثال 40 ارسم منحني الدالة $f(x) = (x+1)^3 - 1$

الحل

1) نقاط التقاطع

$$f(x) = (x+1)^3 - 1$$

نعطي $x = 0$

$$f(0) = (0+1)^3 - 1 = 0$$

نقطة التقاطع $(0,0)$

نعطي $f(x) = 0$

$$(x+1)^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^3 = 1 \Rightarrow x = 0$$

2) نجد نقاط النهايات

$$f'(x) = 3(x+1)^2(1)$$

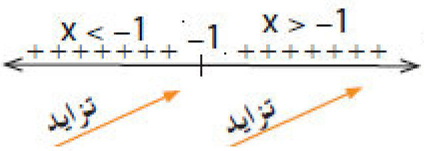
$$3(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$f(-1) = (-1+1)^3 - 1 = -1$$

$\therefore$ $(-1,-1)$ نقطة حرجة

الدالة متزايدة في مجالها

اشارة $f'(x)$



3) نجد نقاط الانقلاب

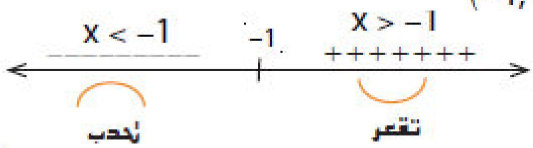
$$f''(x) = 6(x+1)$$

$$f''(x) = 0$$

$$6(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$\therefore$ النقطة $(-1,-1)$

اشارة $f''(x)$

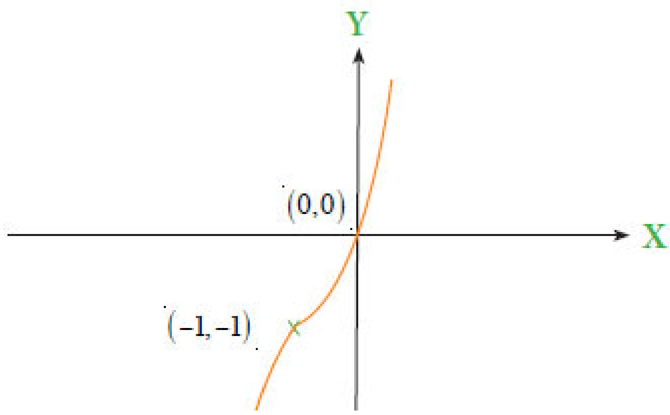


منطقة التقعر $= \{x : x \in R, x > -1\}$

منطقة التحدب $= \{x : x \in R, x < -1\}$

نقطة انقلاب $(-1,-1)$

x	y
0	0
−1	−1
−2	−2
1	7

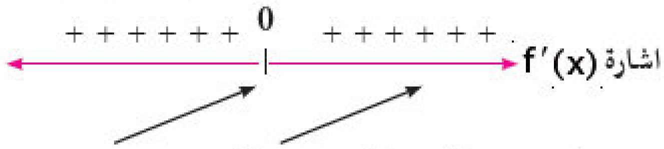


مثال : ارسم منحني الدالة $f(x)=x^5$

الحل :ـ

(0,0) نقطة التقاطع مع المحورين الإحداثيين.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$$

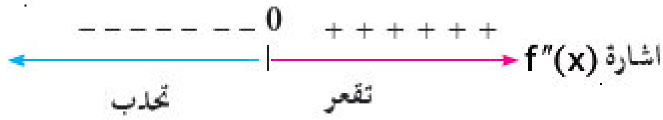


f متزايدة في كل من $\{x : x > 0\}$ ، $\{x : x < 0\}$

(0,0) نقطة حرجة لا تمثل نقطة نهاية.

$$f''(x) = 20x^3$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

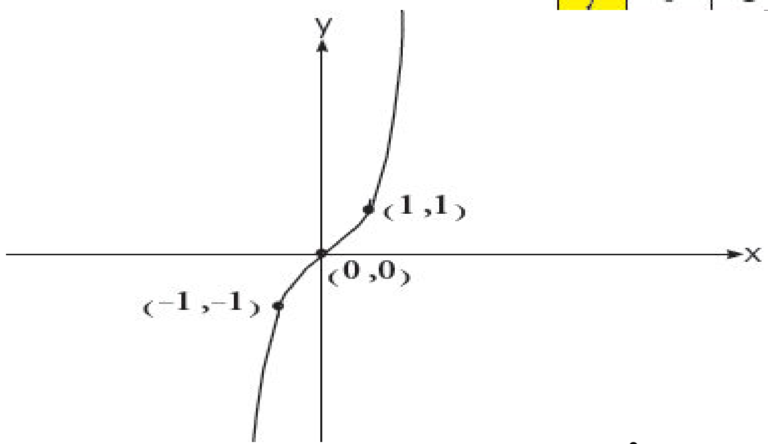


f مقعرة في $\{x : x > 0\}$

f محدبة في $\{x : x < 0\}$

∴ (0,0) نقطة الانقلاب

x	0	1	−1	2	−2
y	0	1	−1	32	−32



مثال : ارسم منحني الدالة $f(x) = x^2 - 6x + 8$ باستخدام معلوماتك في التفاضل

الحل :

لكي نجد نقاط التقاطع مع المحورين نعوض عن x بالصفر ونجد قيمة y ثم نعوض عن قيمة y بالصفر ونجد قيمة x

$f(0) = (0)^2 - 6(0) + 8 = 8 \rightarrow (0,8)$

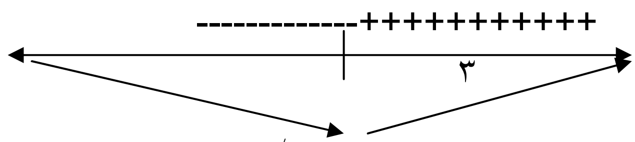
$x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow (x-4)(x-2) = 0 \rightarrow x = 4 \;,\; x = 2 \rightarrow (4,0) \;,\; (2,0)$

نجد القيم العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص ونقط الانقلاب الخطوات معروفة

$f'(x) = 2x - 6 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

$f(3) = (3)^2 - 6(3) + 8 = -1$

إذا النقطة هي (3,-1) إشارة $f'(x)$



$f'(2) = 2(2) - 6 = -2 \quad f'(4) = 2(4) - 6 = 2$

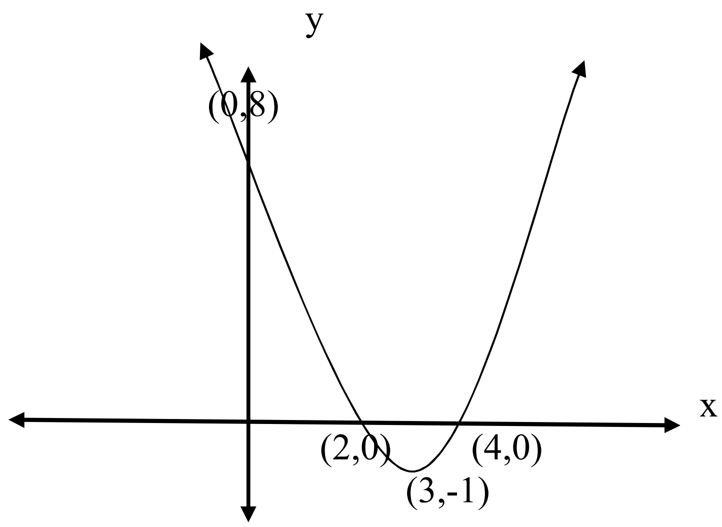
تم الانتقال من الإشارة السالبة إلى الإشارة الموجبة لذلك (3,-1) تمثل نهاية صغرى محلية

مناطق التزايد = $\{ x : x \in R \; x > 3\}$

مناطق التناقص= $\{ x : x \in R \ x < 3\}$

$f^{//}(x) = 2 \rightarrow 2 = 0$ هذه العبارة خاطئة

إذاً لا توجد نقط انقلاب والدالة في حالة تقعر



مثال : ارسم منحني الدالة $f(x) = 2x - x^2$ باستخدام معلوماتك في التفاضل

الحل :

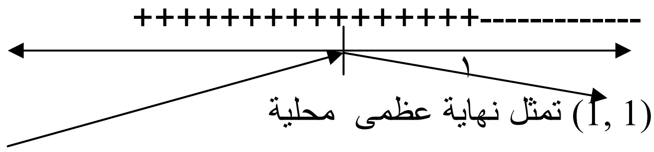
$x = 0 \rightarrow f(0) = 2(0) - (0)^2 = 0 \rightarrow (0,0)$

$y = 0 \rightarrow x(2-x) = 0 \rightarrow x = 0 \ , \ x = 2 \ \rightarrow (2,0)$

$f^{/}(x) = 2 - 2x \rightarrow 2 - 2x = 0 \rightarrow x = 1$

$f(1) = 2(1) - (1)^2 = 1$

إذا النقطة هي $(1, 1)$ إشارة $f^{/}(x)$



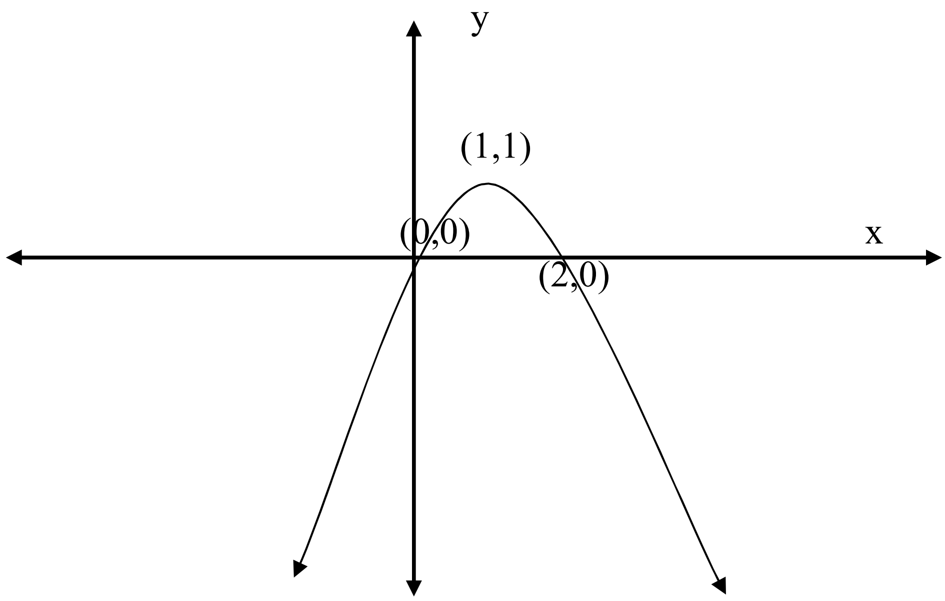
تم الانتقال من الإشارة الموجبة إلى الإشارة السالبة لذلك $(1, 1)$ تمثل نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد = $\{ x : x \in R \ x < 1\}$

مناطق التناقص= $\{ x : x \in R \ x > 1\}$

$f^{//}(x) = -2 \rightarrow -2 = 0$ هذه العبارة خاطئة

إذاً لا توجد نقط انقلاب والدالة في حالة تحدب



مثال : ارسم منحني الدالة $f(x) = 2x^3 - 6x$ باستخدام معلوماتك في التفاضل

الحل :

$x = 0 \rightarrow f(0) = 2(0)^3 - 6(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

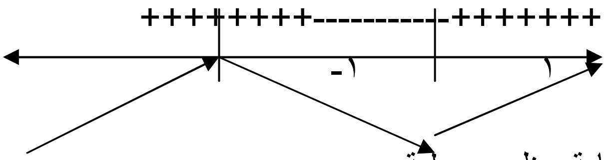
$y = 0 \rightarrow 2x^3 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2-3) = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow (\pm\sqrt{3},0)$

$f'(x) = 6x^2 - 6 \rightarrow 6x^2 - 6 = 0 \rightarrow x = 1 \;,\; x = -1$

$f(1) = 2(1)^3 - 6(1) = -4 \rightarrow (1,-4)$

$f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) = 4 \rightarrow (-1, 4)$

إذا النقاط هي $(1,-4)$, $(-1,4)$ إشارة $f'(x)$



إذا $(1,-4)$ تمثل نهاية صغرى محلية والنقطة $(-1,4)$ تمثل نهاية عظمى محلية

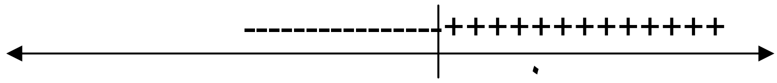
مناطق التزايد = $\{ x : x \in R \; x < -1\}$

مناطق التزايد = $\{ x : x \in R \; x > 1\}$

مناطق التناقص الفترة $(-1,1)$

$f''(x) = 12x \rightarrow 12x = 0 \rightarrow x = 0$

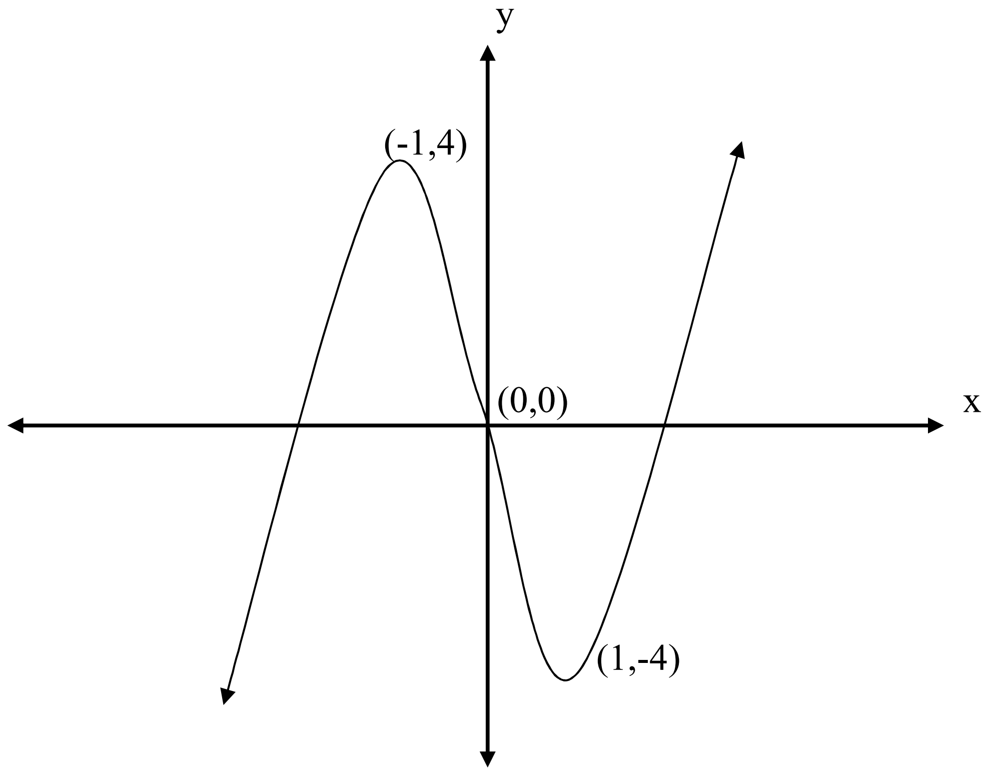
إشارة المشتقة الثانية



نُلاحظ أن النقطة $(0,0)$ تفصل بين الإشارة السالبة والموجبة لذلك تمثل نقطة انقلاب

مناطق التحدب = $\{ x : x \in R \; x < 0\}$

مناطق التقعر = $\{ x : x \in R \; x > 0\}$



تمارين (3-6)

بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدوال التالية :

1) $f(x) = 4 - 6x - x^2$

2) $f(x) = 3x - x^3$

3) $f(x) = (x-1)^3$

4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

١): ارسم منحنى الدالة $f(x) = 4 - 6x - x^2$ باستخدام معلوماتك في التفاضل

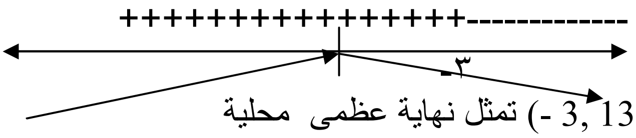
الحل :

$x = 0 \rightarrow f(0) = 4 - 6(0) - (0)^2 = 4 \rightarrow (0,4)$

$f^{/}(x) = -6 - 2x \rightarrow -6 - 2x = 0 \rightarrow x = -3$

$f(3) = 4 - 6(-3) - (-3)^2 = 4 + 18 - 9 = 13$

إذا النقطة هي $(-3, 13)$ إشارة $f^{/}(x)$



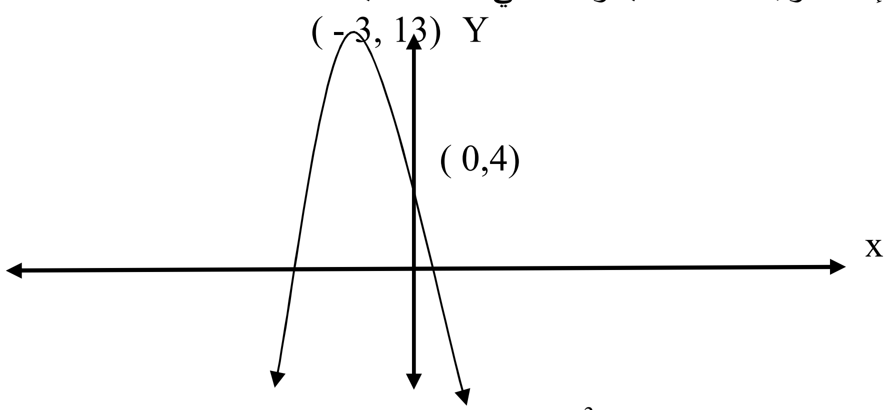
تم الانتقال من الإشارة الموجبة إلى الإشارة السالبة لذلك $(-3, 13)$ تمثل نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد = $\{x : x < -3\}$

مناطق التناقص= $\{x : x > -3\}$

$f^{//}(x) = -2 \rightarrow -2 = 0$ هذه العبارة خاطئة

إذاً لا توجد نقط انقلاب والدالة في حالة تحدب



٢) : ارسم منحنى الدالة $f(x) = 3x - x^3$ باستخدام معلوماتك في التفاضل

الحل :

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 3(0) - (0)^3 = 0 \therefore (0,0), y = 0 \Rightarrow 3x - x^3 = 0, x(3 - x^2) = 0$

$\therefore x = 0, \ldots x^2 = 3 \Rightarrow x = \mp\sqrt{3} \ldots\ldots\ldots \therefore (\sqrt{3},0) \ldots, (-\sqrt{3},0)$

$f'(x) = 3 - 3x^2 \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0 \ldots\ldots \div 3 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 3(1) - 1^3 = 2 \ldots \therefore (1,2), \ldots x = -1 \Rightarrow f(-1) = 3(-1) - (-1)^3 = -2 \ldots \therefore (-1,-2)$

إشارة $f^{/}(x)$

---------++++++++++--------

-١ ١

إذا (2-,1-) تمثل نهاية صغرى محلية والنقطة (1,2) تمثل نهاية عظمى محلية

مناطق التناقص = $\{x : x < -1\}$

مناطق التناقص = $\{x : x > 1\}$

مناطق التزايد الفترة $(-1,1)$

$f^{//}(x) = -6x \rightarrow -6x = 0 \rightarrow x = 0$

إشارة المشتقة الثانية

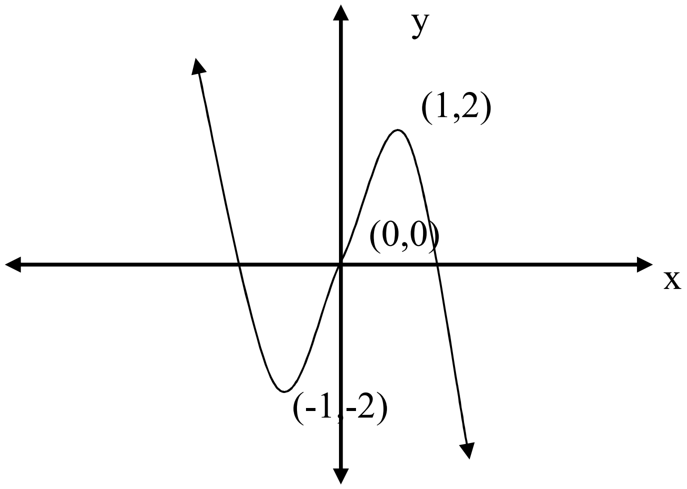
++++++++++++++++++++---------------

٠

نُلاحظ أن النقطة $(0,0)$ تفصل بين الإشارة السالبة والموجبة لذلك تمثل نقطة انقلاب

مناطق التقعر = $\{x : x < 0\}$

مناطق التحدب = $\{x : x > 0\}$



٣): ارسم منحني الدالة $f(x) = (x-1)^3$ باستخدام معلوماتك في التفاضل

الحل :

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = (0-1)^3 = -1 \therefore (0,-1), y = 0 \Rightarrow (x-1)^3 = 0, (x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1 \therefore (1,0)$$

$$f'(x) = 3(x-1)^2 \Rightarrow 3(x-1)^2 = 0 .....\div 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 ...\therefore (1,0)$$

إشارة $f^{/}(x)$

++++++++++++++++++++++++++++++++

١

مناطق التزايد = $\{x : x \in R\ x < 1\}$

مناطق التزايد = $\{x : x \in R\ x > 1\}$

$$f''(x) = 6(x-1) \Rightarrow 6(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 ...\therefore (1,0)$$

أي أن النقطة نقطة انقلاب

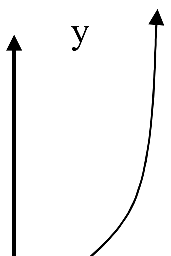
إشارة المشتقة الثانية

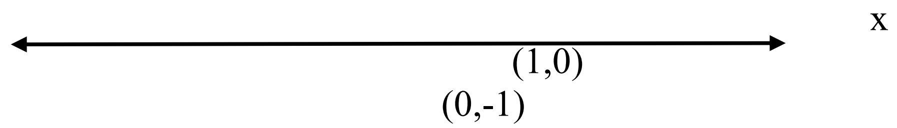
-----------------+++++++++++++++++

١

مناطق التحدب = $\{x : x < 1\}$

مناطق التقعر = $\{x : x > 1\}$





٤) : ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 +1$ باستخدام معلوماتك في التفاضل

الحل :

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = (0)^3 - 2(0)^2 + 1 = 1 .\therefore (0,1),$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x \Rightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x-4) = 0 \Rightarrow x = 0..,x = \frac{4}{3}$$

$$f(0) = 0^3 - 2(0)^2 + 1 = 1....\therefore (0,1),..x = \frac{4}{3} \Rightarrow f(\frac{4}{3}) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2(\frac{4}{3})^2 + 1 = \frac{-5}{27}...\therefore (\frac{4}{3},\frac{-5}{27})$$

إشارة $f^{/}(x)$

+++++++++++----------+++++++++

0 4/3

إذا $(\frac{4}{3},\frac{-5}{27})$ تمثل نهاية صغرى محلية والنقطة $(0,1)$ تمثل نهاية عظمى محلية

$f^{//}(x) = -6x \rightarrow 6x - 4 = 0 \rightarrow x = 2/3$

$$f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^3 - 2(\frac{2}{3})^2 + 1 = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + 1 = \frac{11}{27}..(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$$

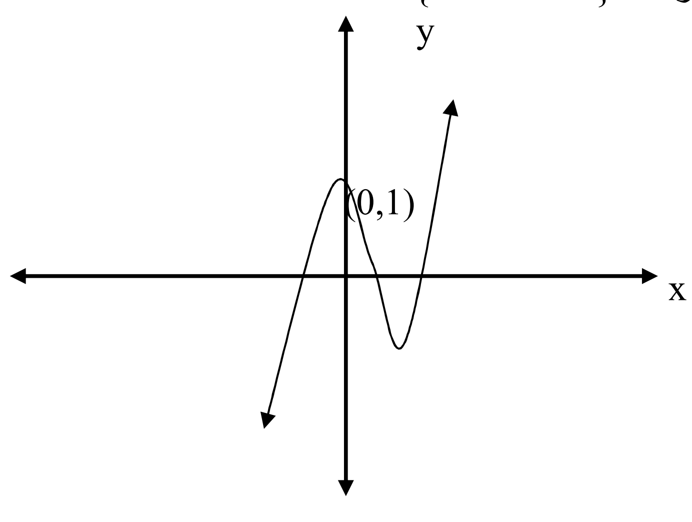
إشارة المشتقة الثانية

-----------------+++++++++++++++++

2/3

مناطق التحدب = $\{ x : x < 2/3\}$

مناطق التقعر = $\{ x : x > 2/3\}$



[3-10] تطبيقات على النهايات العظمى والصغرى

مثال 41 جد عددين مجموعهما يساوي 20 اذا كان :

a) حاصل ضربهما اكبر مايمكن.

b) مجموع مربعيهما اصغر مايمكن .

الحل

a) نفرض العدد الاول = x

العدد الثاني = y

حاصل ضرب $m = xy$

$$m = x\,y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \ ①$$

$$x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x \quad \cdots\cdots\cdots \ ②$$

نعوض① في ②

$$\therefore m = x(20 - x) \Rightarrow m = 20x - x^2$$

$$\acute{m} = 20 - 2x$$

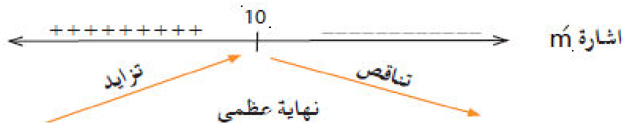
نجعل

$$\acute{m} = 0$$

$$20 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{2} = 10$$

$$y = 20 - 10 = 10$$

وللتأكد من صحة الحل ندرس (وهو للاطلاع لجميع الامثلة) .



b)

$$h = x^2 + y^2$$

$$h = x^2 + (20 - x)^2$$

$$h = x^2 + 400 - 40x + x^2$$

$$\Rightarrow h = 2x^2 - 40x + 400$$

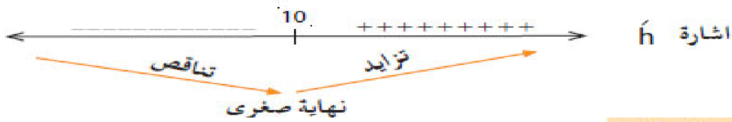
$$\acute{h} = 4x - 40 \Rightarrow 4x - 40 = 0$$

العدد الاول

$$\Rightarrow x = \frac{40}{4} = 10$$

العدد الثاني

$$y = 20 - 10 = 10$$



مثال 42 جد ابعاد اكبر مستطيل محيطة 40 متر .

الحل :-

نفرض ان طول المستطيل = x

عرض المستطيل = y

المساحة $m = x\,y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \ ①$

محيط المستطيل = (الطول +العرض) 2

$2(x + y) =$

$$2(x + y) = 40 \Rightarrow x + y = 20$$

$$\Rightarrow y = 20 - x$$

نعوض① في ②

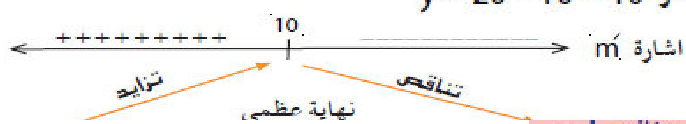
$$\therefore m = x(20 - x)$$

$$m = 20x - x^2$$

$$\acute{m} = 20 - 2x \Rightarrow 20 - 2x = 0$$

$\Rightarrow x = 10$ متر

$y = 20 - 10 = 10$ متر



مثال -1- جد العدد الذي اذا اضيف الى مربعه يكون الناتج اصغر ما يمكن

الحل

ليكن العدد = x

∴ مربع العدد = x^2

ولتكن $f(x) = x+x^2$

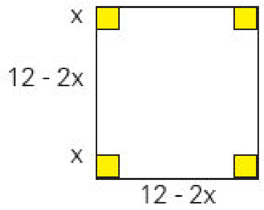
$$f'(x) = 1+2x,$$

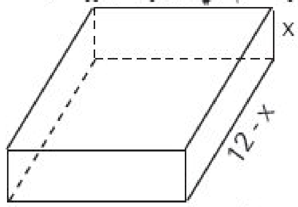
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

∴ توجد نهاية صغرى محلية عند $x = -\frac{1}{2}$

∴ العدد هو $\left(-\frac{1}{2}\right)$

صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها 12cm وذلك بقص أربعة مربعات متساوية الأبعاد من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة منها . ما هو الحجم الأعظم لهذه العلبة؟





الحل

نفرض طول ضلع المربع المقطوع يساوي x cm

∴ أبعاد الصندوق هي: $12-2x \;;12-2x;\; x$

الحجم = حاصل ضرب أبعاده الثلاثة:

$$v = (12-2x)(12-2x)(x)$$

$$V = f(x) = x(144-48x+4x^2)$$

$$V = f(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

$$\frac{dv}{dx} = f'(x) = 144 - 96x + 12x^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow 0=12(12-8x+x^2) \Rightarrow 12(6-x)(2-x)=0$$

النقط الحرجة $x = 6$ ، $x = 2$

اشارة $f'(x)$ $+ + + + + + \; 2 \; - - - - - - \; 6 \; + + + + + +$

عند 2 توجد نهاية عظمى للحجم وتساوي $v = f(2) = 2(12-4)^2 = 128cm^3$

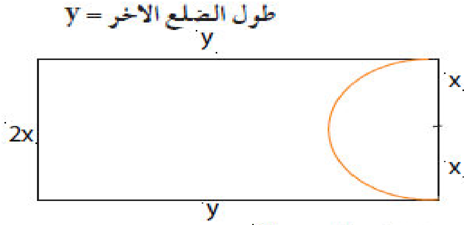
مثال 43

من مستطيل محيطة $(120)cm$ قطعت منطقة على شكل نصف دائرة ينطبق قطرها على احد الضلعين الصغيرين للمستطيل مابعاد ذلك المستطيل لكي تكون المساحة المتبقية بعد القطع اكبر مايمكن؟

الحل :-

نفرض طول الضلع الصغير للمستطيل = 2x

طول الضلع الاخر = y



مساحة المستطيل = 2xy

المساحة المقطوعة = نصف دائرة قطرها (x)

∴ المساحة المقطوعة = $\frac{1}{2}x^2\pi$

$$\frac{1}{2}x^2 \; \frac{22}{7} = \frac{11}{7}x^2$$

$$m = 2xy - \frac{11}{7}x^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

∵ محيط المستطيل $2(2x+y)$

$$\therefore\; 2(2x+y) = 120$$

$$2x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - 2x \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

نعوض ② في ①

$$m = 2x(60-2x) - \frac{11}{7}x^2$$

$m = 120x - 4x^2 - \frac{11}{7}x^2$

$m' = 120 - 8x - \frac{22}{7}x$

$\therefore 120 - 8x - \frac{22}{7}x = 0$ بضرب طرفي المعادلة (7)

$840 - 56x - 22x = 0$

$78x = 840 \Rightarrow x = \frac{840}{78} = \frac{140}{13}$ cm

∴ طول الضلع الصغير $= 2x$

$= \frac{280}{13}$

طول الضلع الكبير $y = 60 - 2x =$

$60 - \frac{280}{13} = \frac{500}{13}$

مثال 44 جد العدد الذي زيادة ثلاثة امثال مربعة على مكعبة اقل ما يمكن

الحل

نفرض العدد $= x$

ثلاثة امثال مربعة $= 3x^2$

مكعب العدد $= x^3$

$m = 3x^2 - x^3$

$m' = 6x - 3x^2 \Rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \div 3$

$2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0$

$x = 0$ يهمل

$x = 2$ العدد

اشارة m'

مثال 45

يراد صنع حوض على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء قاعدتة مربعة الشكل وحجمــه $(864)^3$

اوجد اقل مساحة من الالواح يمكن ان تستخدم في صنعه.

الحل

نفرض طول ضلع الحوض $= x$

ارتفاع الحوض $= y$

مس الكلية = المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحد (لانه بدون غطاء)

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الكلية $= h$

$h = 4xy + x^2$ .... ①

حجم المتوازي = مساحة القاعدة × الارتفاع

$v = x^2y$

$\therefore x^2y = 864$

$y = \frac{864}{x^2}$ .... ②

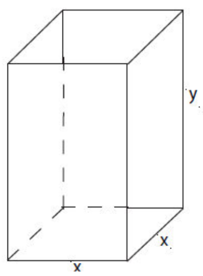
نعوض ② في ①

$\therefore h = 4x\frac{864}{x^2} + x^2$

$h = 4(864)x^{-1} + x^2$

$h' = -4(864)x^{-2} + 2x$

نجعل $h' = 0$



$$\frac{-4(864)}{x^2}+2x=0$$

$$\frac{-3456}{x^2}+2x=0 \Rightarrow \frac{-1728}{x^2}+x=0$$

$$-1728+x^3=0 \Rightarrow x^3=1728$$ نضرب طرفي المعادلة في x^2

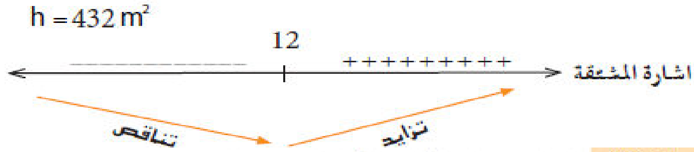
$$x=2\times2\times3=12m$$

$$y=\frac{864}{x^2}=\frac{864}{(12)^2}=\frac{864}{144}=6m$$

$$h=4xy+x^2$$

$$h=4(12)x6+(12)^2$$

$$h=432\,m^2$$



مثال 46 اذا كانت دالة الكلفة الكلية لانتاج سلعة معينة هي

$$c(x)=\frac{1}{9}x^2+6x+100$$

جد حجم الانتاج الذي عنده يكون معدل الكلفة اقل مايمكن.

الحل

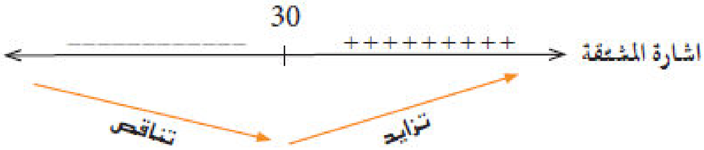
نجد معدل الكلفة

$$AC=\frac{c(x)}{x}=\frac{1}{9}x+6+\frac{100}{x}$$

$$\frac{d(AC)}{dx}=\frac{1}{9}-\frac{100}{x^2}=0 \Rightarrow x^2=900 \Rightarrow x=30$$

عندما $x=30$ فان القيمة الصغرى لمعدل الكلفة

تحصل عندما يكون حجم الانتاج 30 وحدة



.مثال :- جد عددين موجبين مجموعهما ٧٥ وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن .

الحل :

نفرض العدد الأول x والعدد الثاني y

$$x+y=75 \Rightarrow x=75-y.........(1)$$

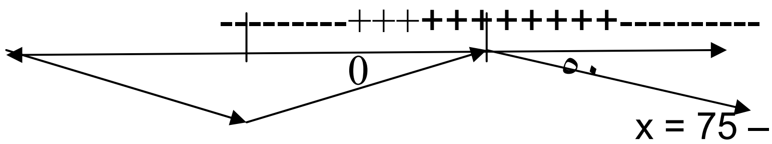
$$m=xy^2........(2) \Rightarrow m=(75-y)y^2=75y^2-y^3 \Rightarrow$$

$$m'=150y-3y^2 \Rightarrow 150y-3y^2=0.....\div 3 \Rightarrow 50y-y^2=0 \Rightarrow$$

$$y(50-y)=0 \rightarrow y=0,....y=50$$

هناك قيمتين نأخذ النهاية العظمى لأن الدالة أكبر ما يمكن

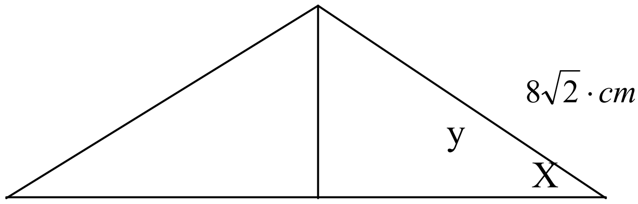
إشارة m'



أي أن $y=50$ ومنها $x=75-50=25$

مثال :- . جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}\cdot cm$

الحل :
نفرض أن قاعدة المثلث هي 2x وارتفاعه y



$$m = \frac{1}{2}2xy = xy........(1)$$

$$x^2 + y^2 = (8\sqrt{2})^2 \Rightarrow y = \sqrt{128 - x^2}.......... (2)$$

$$m = x\sqrt{128 - x^2} \Rightarrow m' = x \times \frac{-2x}{2\sqrt{128 - x^2}} + \sqrt{128 - x^2} \times 1$$

$$\frac{-x^2}{\sqrt{128 - x^2}} + \sqrt{128 - x^2} = 0..... \times \sqrt{128 - x^2} \Rightarrow -x^2 + 128 - x^2 = 0$$

$$128 - 2x^2 = 0....... \div 2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8.cm... \therefore y = \sqrt{128 - 64} = 8\cdot cm$$

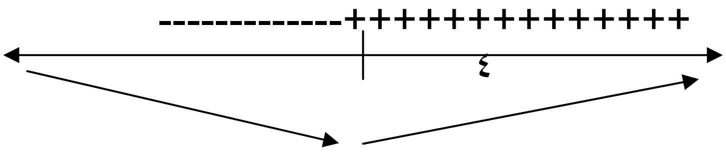
$$\Rightarrow m = 8 \times 8 = 64 \cdot cm^2$$

مثال :ـ جد أقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $16\ cm^2$
الحل :
نفرض أن أبعاد المستطيل هي x , y
P = 2x + 2y …….(1)

$$m = xy \Rightarrow xy = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{x}.........(2)$$

$$p = 2x + \frac{32}{x} \Rightarrow p' = 2 + \frac{x(0) - 32}{x^2} = 2 - \frac{32}{x^2}$$

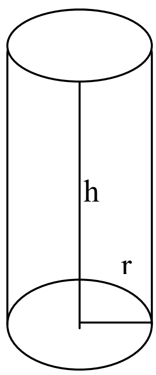
$$2 - \frac{32}{x^2} = 0...... \times x^2 \Rightarrow 2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$



x = 4 تمثل نهاية صغرى
y = 4
P = 2(4) + 2(4) = 16 cm

١١ . حاوية اسطوانية الشكل مفتوحة من الأعلى سعتها $125\pi \cdot cm^3$ جد أبعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها اقل ما يمكن .
الحل :

المساحة = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة



$$A = 2\pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r^2 ....(1)$$

$$v = \pi \cdot r^2 h \Rightarrow 125\pi = \pi \cdot r^2 h........ \div \pi \Rightarrow h = \frac{125}{r^2}......(2)$$

$$A = 2\pi \cdot r \times \frac{125}{r^2} + \pi \cdot r^2 = \frac{250\pi}{r} + \pi \cdot r^2$$

$$A' = \frac{-250\pi}{r^2} + 2\pi \cdot r \Rightarrow 2\pi \cdot r = \frac{250\pi}{r^2}...... \div \pi \Rightarrow$$

$$r^3 = 125 \Rightarrow r = 5 \cdot cm \Rightarrow h = \frac{125}{25} = 5 \cdot cm$$

١٢ . خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فإذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته $108\ cm^2$ جد أبعاد الخزان لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علماً أن الخزان ذو غطاء كامل .

الحل :

نفرض أن عرض القاعدة هو x وطول القاعدة هو 2x والارتفاع هو y

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

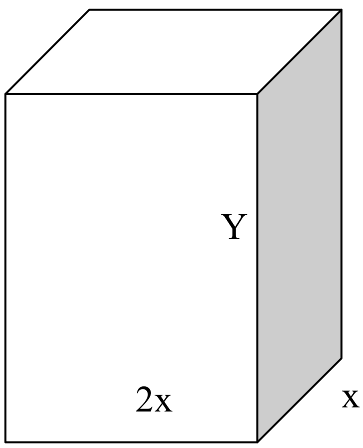
$$A = 2(2x + x)y + 2(2x)(x) \Rightarrow 108 = 6xy + 4x^2 ..... \div 2 \Rightarrow$$

$$54 - 2x^2 = 3xy \Rightarrow y = \frac{54 - 2x^2}{3x}........(1)....v = 2x^2 y......(2)$$

$$v = 2x^2 \left(\frac{54 - 2x^2}{3x}\right) = \frac{2}{3}(54x - 2x^3) \Rightarrow v' = \frac{2}{3}(54 - 6x^2)$$

$$\frac{2}{3}(54 - 6x^2) = 0..... \div \frac{2}{3} \Rightarrow 54 - 6x^2 = 0..... \div 6 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \cdot cm$$

$$y = \frac{54 - 2(9)}{3(3)} = \frac{54 - 18}{9} = \frac{36}{9} = 4 \cdot cm$$



إعداد

إبراهيم عبد الله فرج

٠٧٧٠١٧٣٤٥٦٩

نينوى \ القيارة \ قرية الزاوية

تمارين (3-7)

1- جد عددين مجموعهما 20 وحاصل ضربهما اكبر مايمكن .

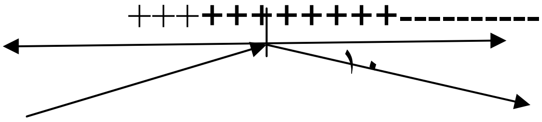
الحل :
نفرض العدد الأول x والعدد الثاني y

$$x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x .... (1)$$

$$m = xy ....(2) \Rightarrow m = x(20 - x) = 20x - x^2 \Rightarrow$$

$$m' = 20 - 2x \Rightarrow 20 - 2x = 0 ..... \div 2 \Rightarrow 10 - x = 0 \Rightarrow x = 10$$

إشارة $m^/$



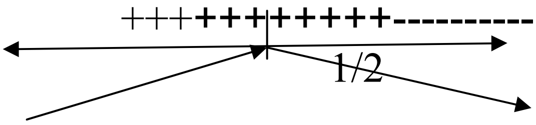
y = 20 – 10 = 10

2- ما العدد الذي زيادته على مربعه اكبر مايكن؟

الحل :- نفرض أن العدد هو x والدالة هي

$$f(x) = x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2x \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

إشارة $f^/(x)$



3- جد عددين موجبين مجموعهما (15) وحاصل ضرب مربع احدهما في مكعب الاخر اكبر مايكن.

الحل : نفرض العدد الأول x والعدد الثاني y

$$x + y = 15 \Rightarrow x = 15 - y..........(1)$$

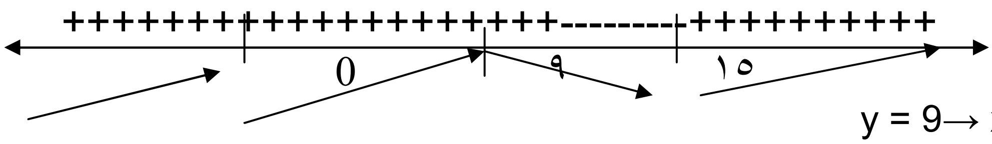
$$m = x^2y^3........(2) \Rightarrow m = (15 - y)^2 y^3 = (225 - 30y + y^2)y^3 = 225y^3 - 30y^4 + y^5$$

$$m' = 675y^2 - 120y^3 + 5y^4 \Rightarrow 675y^2 - 120y^3 + 5y^4 = 0..... \div 5 \Rightarrow 135y^2 - 24y^3 + y^4 = 0$$

$$y^2(135 - 24y + y^2) = 0 \rightarrow y^2(15 - y)(9 - y) = 0 \Rightarrow y = 0....y = 15....y = 9$$

نأخذ النهاية العظمى لأن الدالة أكبر ما يمكن

إشارة $m^/$



y = 9→ x = 15 – 9 = 6

4- جد عددين مجموعهما 10 وحاصل ضرب مربع احدهما في مربع الاخر اكبر مايكن.

الحل :
نفرض العدد الأول x والعدد الثاني y

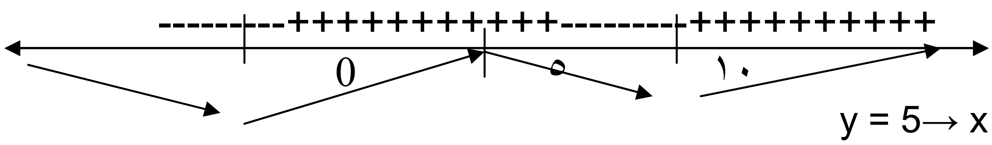
$$x + y = 10 \Rightarrow x = 10 - y .... (1)$$

$$m = x^2y^2........(2) \Rightarrow m = (10 - y)^2 y^2 = (100 - 20y + y^2)y^2 = 100y^2 - 20y^3 + y^4$$

$$m' = 200y - 60y^2 + 4y^3 \Rightarrow 200y - 60y^2 + 4y^3 = 0..... \div 4 \Rightarrow 50y - 15y^2 + y^3 = 0$$

$$y(50 - 15y + y^2) = 0 \rightarrow y(10 - y)(5 - y) = 0 \Rightarrow y = 0....y = 10....y = 5$$

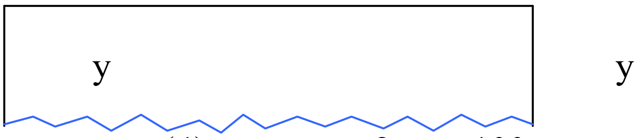
إشارة $m^/$



y = 5→ x = 10 – 5 = 5

5- قطعة ارض مستطيلة الشكل يحدها نهر من احدى جهاتها جد اكبر مساحة من الارض يمكن تسييجها بسياج طوله (100) متر.

الحل :- نفرض أن الطول = x والعرض = y x



$$m = xy.......(1)....\ p = x + 2y \Rightarrow 100 = x + 2y \Rightarrow x = 100 - 2y......(2)$$

$$m = y(100 - 2y) \Rightarrow m = 100y - 2y^2 \Rightarrow m' = 100 - 4y$$

$$100 - 4y = 0.......\div 4 \Rightarrow 25 - y = 0 \Rightarrow y = 25.m$$

إشارة m' +++++++++++----------

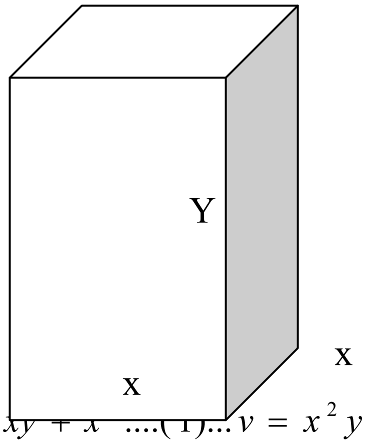
٢٥

$y = 25$ نهاية عظمى ومنها نحصل على $x = 100 - 2(25) = 25$ .m

6- حوض على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء قاعدته مربعة وحجمه $(108)m^3$ جد ابعاده بحيث تكون مساحة الالواح المستخدمة في صنعة اقل مايمكن.

الحل :-

نفرض أن طول ضلع القاعدة هو x وارتفاعها هو y



المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$m = 4xy + x^2 ....(1)...\ v = x^2 y \Rightarrow x^2 y = 108 \Rightarrow y = \frac{108}{x^2}.....(2)$$

$$m = 4x\left(\frac{108}{x^2}\right) + x^2 \Rightarrow m = \frac{432}{x} + x^2 \Rightarrow m' = \frac{-432}{x^2} + 2x \Rightarrow \frac{-432}{x^2} + 2x = 0$$

$$2x = \frac{432}{x^2} \Rightarrow 2x^3 = 432\ .....\div 2 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6$$

-------------++++++++++++++

٦

$x = 6$ .m تمثل نهاية صغرى

$y = 108/36 = 3$ .m

7- اطلقت رصاصة الى الاعلى وكان ارتفاعها (m) متر في نهاية t من الثواني بحيث ان $m = 224t - 16t^2$ احسب اقصى ارتفاع تصل الية الرصاصة .

الحل :-

أقصى ارتفاع تصل إليه الرصاصة هو عندما تصبح سرعتها صفر (اللحظة التي تقف عندها الرصاصة)

أي أن المشتقة الأولى تساوي صفر

$$m' = 224 - 32t \Rightarrow 224 - 32t = 0...\div 32 \Rightarrow 7 - t = 0 \Rightarrow t = 7$$

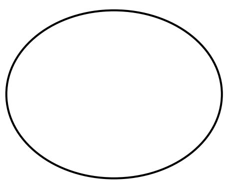
إشارة m' +++++++++++----------

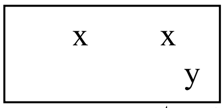
7

ومنها نحصل على $m = 224(7) - 16(49) = 1568 - 784 = 784$ .m

8- نافذة علي شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة بحيث ينطبق قطرها على احد ابعاد المستطيل فاذا كان محيط المستطيل (8)m جد ابعاد المستطيل لكي تكون مساحة النافذة اكبر ما يمكن.

الحل :-





مساحة النافذة = مساحة المستطيل + مساحة نصف دائرة

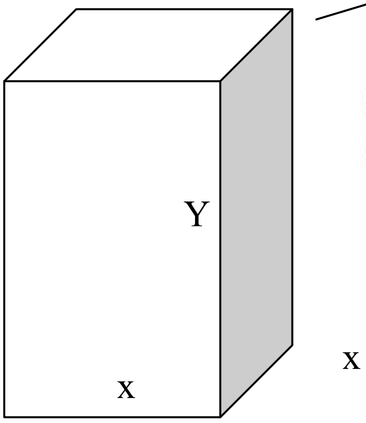
$$m = xy + \frac{1}{2}\pi x^2 ......(1)...\ 2y + 4x = 8 ...\div 2 \Rightarrow y = 4 - 2x.....(2)$$

$$m = x(4-2x) + \frac{\pi}{2}x^2 = 4x - 2x^2 + \frac{\pi}{2}x^2 \Rightarrow m' = 4 - 4x + \frac{\pi}{2}(2x)$$

$$4 - 4x + \pi x = 0 \Rightarrow x(4-\pi) = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{4-\pi}$$

إشارة m' +++++++++++++----------

$$y = 4 - 2\times\frac{4}{4-\pi} = 4 - \frac{8}{4-\pi}$$



9- في ورشة للنجارة يراد صنع صندوق من الخشب على شكل متوازي السطوح قاعدته مربعة الشكل ولـه غطاء كامل . جد ابعاد الصندوق لكي تكون مساحة الخشب المستعمل اقل مايمكن علما ان سعة الصندوق $(27)m^3$.

الحل :-

نفرض أن طول ضلع القاعدة هو x والارتفاع هو y

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$$m = 4xy + 2x^2 ....(1)..v = x^2y \Rightarrow 27 = x^2y \Rightarrow y = \frac{27}{x^2}....(2)$$

$$m = 4x\times\frac{27}{x^2} + 2x^2 = \frac{108}{x} + 2x^2 \Rightarrow m' = \frac{-108}{x^2} + 4x$$

$$\frac{-108}{x^2} + 4x = 0 \Rightarrow 4x = \frac{108}{x^2} \Rightarrow 4x^3 = 108 ...\div 4 \Rightarrow x^3 = 27 ..\therefore x = 3$$

-------------++++++++++++++

٣

x = 3 .m تمثل نهاية صغرى

y = 27/3 = 9 .m

10- اذا كانت دالة الكلفة لانتاج سلعة ما هي: $c(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 40$ جد حجم الانتاج الذي يكون عنده معدل الكلفة اقل مايمكن .

الحل :-

لكي نجد دالة معدل الكلفة الكلية يجب أولا القسمة على x ثم نشتق الدالة

$$AC = \frac{c(x)}{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + 40}{x} = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{40}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(AC) = \frac{1}{2} - \frac{40}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{40}{x^2} \Rightarrow x^2 = 80 \Rightarrow x = 4\sqrt{5}$$

الفصل الرابع

التكامل
Integration

[4-1] عكس التفاضل

قوانين التكامل غير المحدود للدوال الجبرية

القاعدة ١: تكامل العدد الثابت

ليكن a عدد ثابت فإن

$\int a dx = ax + c$ حيث c ثابت التكامل

أمثلة :

$$1)\ \int 5dx = 5x + c$$
$$2)\ \int -7dx = -7x + c$$
$$3)\ \int -\frac{5}{3}dx = -\frac{5}{3}x + c$$

القاعدة ٢:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ باستثناء $n = -1$ حيث c ثابت التكامل

أمثلة:

$$1)\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4}x^4 + c$$
$$2)\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + c$$
$$3)\int x^{\frac{2}{5}}dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + c$$

القاعدة ٣ :

يمكن إخراج عامل ثابت من تحت إشارة التكامل أو بالعكس دون أن تتغير النتيجة أي أن

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

وذلك لأن اشتقاق الطرفين يعطي $af(x) = af(x)$

أمثلة :

$$1)\int 7x^4 dx = 7\int x^4 dx = 7\frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{7}{5}x^5 + c$$
$$2)\int \frac{-2}{x^3}dx = -2\int \frac{1}{x^3}dx = -2\int x^{-3}dx = -2\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -2\frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{x^2} + c$$
$$3)\ \int \sqrt{5}x^{-\frac{2}{3}}dx = \sqrt{5}\int x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\sqrt{5}x^{\frac{1}{3}} + c$$

القاعدة ٤:

تكامل المجموع الجبري لعدة دوال يساوي المجموع الجبري لتكاملا ت هذه الدوال أي أن :

إذا كانت $f(x), g(x)$ دوال قابلة للتكامل في x فإن

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

وبصفة عامة إذا كانت $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x)$ دوال قابلة للتكامل في x فإن

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx$$

أمثلة :

$$1)\int\left(x^2-2x+5\right)dx=\int x^2dx-\int 2xdx+\int 5dx$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+5x+c=\frac{1}{3}x^3-x^2+5x+c$$

$$2)\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx=\int\sqrt{x}dx-2\int\frac{1}{x^3}dx$$
$$=\int x^{\frac{1}{2}}dx-2\int x^{-3}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}}-2\frac{x^{-3+1}}{-2}+c=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{-2}+c$$

$$3)\int\left(x^5-\sqrt{2}x-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int x^5dx-\sqrt{2}\int x\,dx-3\int x^{-2}dx$$
$$=\frac{1}{5}x^5-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+3x^{-1}+c$$

القاعدة 5

لتكن u دالة في x و n عدد يخالف -1 فتكون لدينا القاعدة التالية:

$\int u^n\,u'dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$ باستثناء $n=-1$ حيث c ثابت التكامل

أمثلة:

$$1)\int\left(2x^3-6\right)^4(6x^2)\,dx$$
$$\int\left(2x^3-6\right)^4(6x^2)\,dx=\frac{\left(2x^3-6\right)^5}{5}+c$$

$$2)\int\left(x^4-2\right)^5x^3\,dx=\frac{1}{4}\int\left(x^4-2\right)^5(4x^3)dx\frac{1}{24}\left(x^4-2\right)^6+c$$

$$3)\int\sqrt{x^3+3x}\left(x^2+1\right)dx=\int\left(x^3+3x\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{3}\int 3\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)dx=\frac{2}{9}\left(x^3+3x+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

تمارين محلولة : احسب التكاملات التالية

$1)\int(2\sqrt{x}-3x^4)dx$	$5)\int 3\left(3x^2-1\right)^3xdx$	$9)\int\sqrt{1-4x}dx$
$2)\int\left(\frac{3}{x^4}-4x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$	$6)\int\left(x^4+2x\right)^2\left(4x^3+2\right)dx$	$10)\int\sqrt[3]{5+x^3}\left(x^2\right)dx$
$3)\int\sqrt{x}(x-3)^2dx$	$7)\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$	$11)\int\frac{(1+3x)dx}{\sqrt{2x+3x^2}}$
$4)\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)dx$	$8)\int 5\left(5x^7+2\right)^2x^6dx$	$12)\int\left(3x-x^3\right)^5\left(1-x^2\right)dx$

الحل

$$1)\int(2\sqrt{x}-3x^4)dx=2\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^4dx=2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-3\frac{x^5}{5}+c=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{5}x^5+c.$$

$$2)\int\left(\frac{3}{x^4}-4x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=3\int x^{-4}dx-4\int x^2dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$=3\frac{x^{-3}}{-3}-4\frac{x^3}{3}+2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=-x^{-3}-\frac{4}{3}x^3+4x^{\frac{1}{2}}+c$$

$$3)\int\sqrt{x}(x-3)^2dx=\int x^{\frac{1}{2}}(x^2-6x+9)dx$$

$$=\int\left(x^{\frac{5}{2}}-6x^{\frac{3}{2}}+9x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}-6\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+9\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{12}{5}x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{3}{2}}+c=\sqrt{x}\left(\frac{2}{7}x^3-\frac{12}{5}x^2+6x\right)+c$$

$$4)\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int(x^{-2}+x^{-3}+x^{-4})dx$$

$$=\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{x^{-3}}{-3}+c=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}+c$$

$$5)\int 3(3x^2-1)^3xdx=\frac{1}{2}\int(3x^2-1)^3(6x)dx=\frac{1}{8}(3x^2-1)^4+c$$

$$6)\int(x^4+2x)^2(4x^3+2)dx=\frac{1}{3}(x^4+2x)^3+c$$

$$7)\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$8)\int 5(5x^7+2)^2x^6dx=\frac{1}{7}\int(5x^7+2)^2(35x^6)dx=\frac{1}{21}(5x^7+2)^3+c$$

$$9)\int\sqrt{1-4x}dx=\int(1-4x)^{\frac{1}{2}}dx=\int(1-4x)^{\frac{1}{2}}dx=-\frac{1}{4}\int(-4)(1-4x)^{\frac{1}{2}}dx=-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)(1-4x)^{\frac{3}{2}}+c=-\frac{2}{12}(1-4x)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$10)\int\sqrt[3]{5+x^3}(x^2)dx=\int(5+x^3)^{\frac{1}{3}}(x^2)dx=\int(5+x^3)^{\frac{1}{3}}(x)^2dx=\frac{1}{3}\int(5+x^3)^{\frac{1}{3}}(3x^2)dx=\frac{1}{3}\frac{3}{4}(5+x^3)^{\frac{4}{3}}+c=\frac{1}{4}(5+x^3)^{\frac{4}{3}}+c$$

$$11)\int\frac{(1+3x)dx}{\sqrt{2x+3x^2}}=\int(1+3x)(2x+3x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\int(1+3x)(2x+3x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int 2(1+3x)(2x+3x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\frac{2}{1}(2x+3x^2)^{\frac{1}{2}}+c$$

$$12)\int(3x-x^3)^5(1-x^2)dx=\int(3x-x^3)^5(1-x^2)dx=\frac{1}{3}\int(3x-x^3)^5(3)(1-x^2)dx=\frac{1}{3}\frac{1}{6}(3x-x^3)^6+c$$

احسب التكاملات التالية:

$1)\int\frac{1}{(1-3x)^2}dx$	$8)\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+5}}dx$	$15)\int\frac{t^3-4t+3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$
$2)\int(2x-3)(4x^2-12x+9)^{\frac{2}{3}}dx$	$9\int\frac{3x^2-1}{\sqrt[5]{2x^3-2x+5}}dx$	$16)\int\frac{4}{\sqrt{x}}dx$
$3)\int(2-x)^2\sqrt{2-x}dx$	$10\int\frac{x^2-2x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$	$17)\int\frac{7x^3}{2-x^4}dx$
$4)\int\sqrt{1+x}dx$	$11)\int\frac{t^5+3t+7}{2\sqrt{t}}dt$	$18)\int x(1-x^2)^6dx$
$5\int(2x+7)(x^2+7x+3)^{4/5}dx$	$12)\int t\sqrt{7t^2+12}dt$	$19)\int(1-x)(1+2x-x^2)^3dx$
$6)\int\frac{(3-\sqrt{x})^8}{\sqrt{x}}dx$	$13)\int\frac{ds}{\sqrt{3s+1}}$	$20)\int(2x-5)\sqrt{(x^2-5x+3)^5}dx$
	$14)\int(1-x)\,x^{\frac{1}{2}}dx$	$21)\int x(x^3-1)dx$

مثال 1 جد كلا من التكاملات الآتية ضمن مجال الدالة وبالنسبة الى x :

الحل

$$1)\ \int(3x^2+5)\,dx=3\int(x^2)\,dx+5\int dx$$

$$=3\cdot\frac{x^3}{3}+5\cdot\frac{x^1}{1}+c$$

$$=x^3+5x+c$$

$$2)\ \int (x^2+1)(2x-3)\,dx = \int (2x^3-3x^2+2x-3)\,dx$$
$$= 2\int x^3 dx - 3\int x^2 dx + 2\int x\,dx - 3\int dx$$
$$= 2\cdot\frac{x^4}{4} - 3\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^2}{2} - 3\frac{x^1}{1} + c$$
$$= \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2 - 3x + c$$

$$3)\ \int \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{-2}{3}} - 1\right) dx$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3\,\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} - x + c$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 9\sqrt[3]{x} - x + c$$

$$4)\ \int \frac{x^4-8x}{x-2}\,dx = \int \frac{x(x^3-8)}{(x-2)}\,dx = \int \frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)}\,dx = \int (x^3+2x^2+4x)\,dx$$
$$= \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + c$$

$$5)\ \int (x^3+7)^5\, x^2\, dx = \frac{1}{3}\int (x^3+7)^5\,(3x^2)\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3+7)^6}{6} + c = \frac{1}{18}(x^3+7)^6 + c$$

$$6)\ \int \frac{(x-2)}{(x^2-4x+5)^2}\,dx = \int (x^2-4x+5)^{-2}(x-2)\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2-4x+5)^{-2}(2x-4)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-4x+5)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{2(x^2-4x+5)} + c$$

$$7)\ \int \frac{x^3}{\sqrt[5]{5-x^4}}\,dx = \int (5-x^4)^{\frac{-1}{5}}\, x^3\,dx = \frac{-1}{4}\int (5-x^4)^{\frac{-1}{5}}(-4x^3)\,dx = \frac{-1}{4}\cdot\frac{(5-x^4)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$$

$$8)\ \int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\,dx = \int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\,dx = \int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\,x\,dx = \frac{-1}{10}\int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}(-10x)\,dx$$
$$= \frac{-1}{10}\cdot\frac{(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{-3}{40}\cdot\sqrt[3]{(3-5x^2)^4} + c$$

$$9)\ \int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2-14x+49}} = \int (x^2-14x+49)^{\frac{-1}{5}}\,dx = \int [(x-7)^2]^{\frac{-1}{5}}\,dx = \int (x-7)^{\frac{-2}{5}}\,dx$$
$$= \frac{(x-7)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c$$

$$10)\ \int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2}\,dx = \int \frac{[(3x^2-4)-4][(3x^2-4)+4]}{x^2}\,dx = \int \frac{(3x^2-8)(3x^2)}{x^2}\,dx$$
$$= \int (3x^2-8)(3)\,dx = \int (9x^2-24)\,dx = \frac{9x^3}{3} - 24x + c = 3x^3 - 24x + c$$

$$11)\ \int \sqrt{z^2+3z+2}\,dx = \sqrt{z^2+3z+2}\int dx = \sqrt{z^2+3z+2}\,.(x+c)$$

حيث $\sqrt{z^2+3z+2}$ يعتبر ثابت بالنسبة للمتغير x

تمارين (4-1)

جد تكاملات كلا مما يأتي بالنسبة الى x :

1) $\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx$

$$\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx = \frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x + c = x^3 - 2x^2 + 3x + c$$

2) $\int (3x - 1)(x + 5)\,dx$

$$\int (3x - 1)(x + 5)\,dx = \int (3x^2 + 15x - x - 5)\,dx = \int (3x^2 + 14x - 5)\,dx$$

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{14x^2}{2} - 5x + c = x^3 + 7x^2 - 5x + c$$

3) $\int \sqrt{x}\,(\sqrt{x} + 1)^2\,dx$

$$\int \sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 1\right)^2 dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + 1)^2\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x + 2x^{\frac{1}{2}} + 1)\,dx$$

$$= \int (x^{\frac{3}{2}} + 2x + x^{\frac{1}{2}})\,dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{2x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

4) $\int \frac{x^3 + 27}{x + 3}\,dx$

$$= \int \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 9)}{(x+3)}\,dx = \int (x^2 - 3x + 9)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x + c$$

5) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{5x^5}\,dx$

$$= \frac{1}{5}\int \left(\frac{x^3}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{1}{x^5}\right)dx = \frac{1}{5}\int (x^{-2} - 2x^{-3} + x^{-5})\,dx = \frac{1}{5}\left(\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{2x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-4}}{-4}\right) + c$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4x^4}\right) + c$$

6) $\int \frac{x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^3 + 6x + 1}}\,dx$

$$= \int \frac{(x^2 + 2)}{(x^3 + 6x + 1)^{\frac{1}{3}}}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x^2 + 6)(x^3 + 6x + 1)^{\frac{-1}{3}}\,dx = \frac{(x^3 + 6x + 1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

7) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

$$= \int \left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx = \int (x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{-1}{3}})\,dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 2 \times \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} + c$$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2 + 16x + 64}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x+8)^2}} = \int \frac{dx}{(x+8)^{\frac{2}{5}}} = \int (x+8)^{\frac{-2}{5}}\,dx = \frac{(x+8)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c = \frac{5}{3}\sqrt[5]{(x+8)^3} + c$$

9) $\int \sqrt[7]{2x^9 - 3x^7}\,dx$

$$= \int \sqrt[7]{x^7(2x^2-3)}dx = \int x\sqrt[7]{2x^2-3}dx = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2-3)^{\frac{1}{7}}dx = \frac{1}{4}\frac{(2x^2-3)^{\frac{8}{7}}}{\frac{8}{7}} + c$$

10) $\int (3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$

$$= \int (3x^2 + x^{\frac{-1}{2}})dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = x^3 + 2x^{\frac{1}{2}} + c$$

11) $\int \frac{y\,dx}{(19-2y^2)^{\frac{1}{3}}}$

$$= \frac{y}{(19-2y^2)^{\frac{1}{3}}}x + c$$

12) $\int \frac{x^4-16}{x+2}\,dx$

$$= \int \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x+2)}dx = \int \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x+2)}dx = \int (x-2)(x^2+4)dx$$

$$= \int (x^3+4x-2x^2-8)dx = \frac{x^4}{4} + 2x^2 - \frac{2x^3}{3} - 8x + c$$

13) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})\,dx$

$$= \int (x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{-1}{3}})dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$$

14) $\int \sqrt[5]{(1-3x)^2}\,dx$

$$= \int (1-3x)^{\frac{2}{5}}dx = \frac{-1}{3}\int (1-3x)^{\frac{2}{5}}dx = \frac{-1}{3}\frac{(1-3x)^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{-5}{21}(1-3x)^{\frac{7}{5}} + c$$

15) $\int x^2\sqrt{x^3+4}\,dx$

$$= \int x^2(x^3+4)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3+4)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}(x^3+4)^{\frac{3}{2}} + c$$

16) $\int (z^2\sqrt{z^3} + 4)\,dx$

$$= (z^2\sqrt{z^3} + 4)x + c$$

[4-3] بعض تطبيقات التكامل غير المحدد

[4-3-1] التطبيق الهندسي للتكامل

مثال :-

اذا كان ميل المنحني عند كل نقطة (x , y) من نقاطه هو $(3x^2 - 2x + 1)$ جد معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة $(2 , 3)$.

الحل لقد ذكرنا في الفصل الثالث ان مشتقة منحني يمثل ميل المنحني في تلك النقطة.

$$y = \int f'(x)\, dx$$

$$y = \int (3x^2 - 2x + 1)\, dx$$

$$y = x^3 - x^2 + x + c$$

المنحني يمر بالنقطة $(2 , 3)$ ، فهي تحقق المعادلة

$$3 = 8 - 4 + 2 + c$$

$$c = -3$$

معادلة المنحني

$$\therefore\ y = x^3 - x^2 + x - 3$$

مثال :-

منحني ميله عند اية نقطة (x , y) يساوي $x\sqrt{x^2+9}$. جد معادلته اذا كان يمر بالنقطة $(0 , 7)$.

الحل

$$y = \int x\sqrt{x^2+9}\ dx$$

$$y = \frac{1}{2}\int (x^2+9)^{\frac{1}{2}}(2x)\ dx$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+9)^3} + c$$

$$\because (0 , 7) \in y = f(x) \Rightarrow 7 = \frac{1}{3}\sqrt{(0+9)^3} + c \Rightarrow c = -2$$

$\therefore$ معادلة المنحني

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+9)^3} - 2$$

مثال :-

جد معادلة المنحني الذي ميله عند اية نقطة (x , y) من نقاطه هو $2x - 4$ وكان للمنحنى نهاية صغرى قيمتها (-3) .

الحل :- بما ان للمنحني نهاية صغرى : $f'(x) = 0$

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \ ,\ y = -3$$

$\therefore (2 , -3)$ نهاية صغرى للمنحني فهي تقع على المنحني

$$y = \int (2x - 4)\ dx \Rightarrow y = x^2 - 4x + c$$

بتعويض $(2 , -3) \Leftarrow$

$$-3 = 4 - 8 + c$$

$$\therefore c = 1$$

$\therefore$ معادلة المنحني هي : $y = x^2 - 4x + 1$

مثال :-

جد معادلة المنحني الذي ميله عند اية نقطة (x , y) من نقطه هو $x^2 - x - 2$ وكان للمنحني نهاية عظمى تنتمي لمحور السينات .

الحل :-

بما ان للمنحني نهاية عظمى تنتمي لمحور السينات $\Leftarrow y = 0$ ، $f'(x) = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2 , x = -1$$

$\therefore (-1 , 0)$ نهاية عظمى

اشارة $f'(x)$: $+++ \uparrow_{-1} ---- \uparrow_{2} +++$

عظمى   صغرى

$$y = \int (x^2 - x - 2)\, dx$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$$

بالتعويض $(-1 , 0)$

$$0 = \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + c$$

$$c = \frac{-7}{6}$$

معادلة المنحني

$$y = \frac{-1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{-7}{6}$$

مثال :-

جد الدالة التي تحقق : $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 2$ ، $\frac{dy}{dx} = 5$ عند النقطة $(1 , 2)$.

الحل :-

$$y'' = 12x^2 - 2 \Rightarrow y' = \int (12x^2 - 2)\, dx$$

$$y' = 4x^3 - 2x + c_1 \qquad \because y' = 5 \;,\; x = 1$$

$$\therefore 5 = 4 - 2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 3 \Rightarrow y' = 4x^3 - 2x + 3$$

$$y = \int (4x^3 - 2x + 3)\, dx$$

$$y = x^4 - x^2 + 3x + c_2 \qquad \because x = 1 \;,\; y = 2$$

$$\therefore 2 = 1 - 1 + 3 + c_2 \Rightarrow c_2 = -1$$

$\therefore$ معادلة المنحني هي : $y = x^4 - x^2 + 3x - 1$

مثال :-

جد معادلة المنحني الذي مشتقه الثانية $(6x)$ والذي يمر بالنقطتين $(1 , 6)$ ، $(-1 , 6)$

الحل :-

$$y'' = 6x \Rightarrow y' = \int 6x\, dx \Rightarrow y' = 3x^2 + c_1$$

$$y = \int (3x^2 + c_1)\, dx \Rightarrow y = x^3 + c_1x + c_2$$

نعوض النقطة $(1 , 6)$

$$6 = 1 + c_1 + c_2$$

$$5 = c_1 + c_2 \;\ldots\ldots\; (1)$$

نعوض النقطة $(-1 , 6) \Leftarrow$

$$6 = -1 - c_1 + c_2$$

$$7 = -c_1 + c_2 \;\ldots\ldots\; (2)$$

$$5 = c_1 + c_2 \;\ldots\ldots\; (1)$$

بالجمع

$$12 = 2c_2 \Rightarrow c_2 = 6$$

وبالتعويض في (1) $\Leftarrow$ $c_1 = -1$

$\therefore$ معادلة المنحني هي : $y = x^3 - x + 6$

مثال :-

اذا كان ميل منحني عند (x , y) هو $ax - 3x^2$ وكان المستقيم $9x - y - 4 = 0$ مماساً عند $(1 , 5)$. جد معادلته.

الحل :-

$$\acute{y} = ax - 3x^2$$

من المستقيم $9x - y - 4 = 0 \Leftarrow$ الميل $slope = \frac{-9}{-1} = 9$

$$\therefore 9 = a(1) - 3(1)^2 \Rightarrow a = 12$$

$$\therefore \acute{y} = 12x - 3x^2 \Rightarrow y = \int (12x - 3x^2)\, dx$$

مجموعة منحنيات $y = 6x^2 - x^3 + c$

نعوض النقطة $(1 , 5) \Leftarrow$ $5 = 6 - 1 + c$

$$\therefore c = 0$$

معادلة المنحني $\therefore y = 6x^2 - x^3$

مثال :-

جد معادلة المنحني الذي ميله عند اية نقطة هو $(ax^2 - 6x - 9)$ وللمنحني نقطة الانقلاب $(1,-6)$

الحل :-

$$\acute{y} = ax^2 - 6x - 9 \Rightarrow \acute{\acute{y}} = 2ax - 6$$

بما ان النقطة $(1 , -6)$ نقطة انقلاب

$$\therefore \acute{\acute{y}} = 0 \Rightarrow 0 = 2a(1) - 6 \Rightarrow a = 3$$

$$\therefore \acute{y} = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow y = \int (3x^2 - 6x - 9)\, dx$$

مجموعة منحنيات $y = x^3 - 3x^2 - 9x + c$

نعوض النقطة $(1 , -6)$ $-6 = 1 - 3 - 9 + c \Rightarrow c = 5$

معادلة المنحني $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

[2-3-4] التطبيق الاقتصادي للتكامل

مثال 1 اذا كانت دالة الايراد الحدي هـــــــي $\acute{M} = 8 - 6v - 2v^2$ حـــــيث v حجم الانتاج

جد دالة الايراد الكلي ودالة السعر .

الحل بمـــــا ان $\acute{M} = 8 - 6v - 2v^2$ دالة الايراد الحدي فإن دالة الايراد الكلي M هي

$$M = \int (8 - 6v - 2v^2)\, dv$$

$$M = 8v - 3v^2 - \frac{2}{3}v^3 + c$$

وعندما يكون حجم الانتاج $v = 0$ ، $M = 0$ فإن $c = 0$ لذا فإن (اي ماينتج يباع)

$$M = 8v - 3v^2 - \frac{2}{3}v^3$$ دالة الايراد الكلي

وحيث ان الايراد M = الكمية المباعة × السعر للوحدة

$\therefore$ فان دالة السعر $= \dfrac{M}{\text{الكمية المباعة}}$

$$= \frac{8v - 3v^2 - \frac{2}{3}v^3}{v}$$

$= 8 - 3v - \frac{2}{3}v^2$ وذلك بفرض ان ما ينتج يباع

مثال 2 اذا كانت دالة الكلفة الحدية $\acute{T}$ هي : $\acute{T} = 2 + 60v - 5v^2$ حيث v حجم الانتاج
جد دالة الكلفة الكلية. علماً ان $T = 65$.

الحل بما ان دالة الكلفة الحدية $\acute{T} = 2 + 60v - 5v^2$ فإن دالة الكلفة الكلية T هي :

$$T = \int (2 + 60v - 5v^2)\, dv$$

$$T = 2v + 30v^2 - \frac{5}{3}v^3 + c$$

فاذا كانت الكلفة الكلية = 65 عندما حجم الانتاج $V = 0$

فان $C = 65$

∴ دالة الكلفة الكلية هي :

$$T = 2v + 30v^2 - \frac{5}{3}v^3 + 65$$

تمارين (4-2)

1- جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x , y) يساوي $\frac{-2}{x^3}$ وكان المنحني يمر بالنقطة $(1 , 3)$

الحل :-

$$y = \int f'(x)dx \Rightarrow y = \int (\frac{-2}{x^3})dx \Rightarrow y = \int -2x^{-3}dx \Rightarrow y = \frac{-2x^{-2}}{-2} + c$$

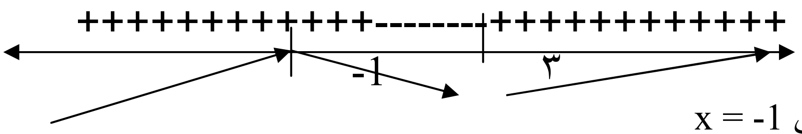
$$y = \frac{1}{x^2} + c \Rightarrow 3 = \frac{1}{1^2} + c \Rightarrow 3 - 1 = c \Rightarrow c = 2$$

معادلة المنحني هي $y = \frac{1}{x^2} + 2$

2- جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x , y) من نقاطه هي $3x^2 - 6x - 9$ وكان للمنحني نهاية عظمى قيمتها (10).

الحل :-

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 .... \div 3 \Rightarrow x^2 - 2x3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 .., x = -1$$



نأخذ النهاية العظمى $x = -1$

$$y = \int f'(x)dx \Rightarrow y = \int (3x^2 - 6x - 9)dx \Rightarrow y = \frac{3x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} - 9x + c$$

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + c \Rightarrow 10 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + c \Rightarrow 10 = -1 - 3 + 9 + c \Rightarrow c = 5$$

معادلة المنحني هي $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

3- جد معادلة المنحني الذي مشتقته الثانية = $6x - 2$ وكان ميله عند النقطة $(2 , 5)$ يساوي (-1)

الحل :-

$$y' = \int f''(x)dx \Rightarrow y' = \int (6x - 2)dx \Rightarrow y' = \frac{6x^2}{2} - 2x + c \Rightarrow$$

$$y' = 3x^2 - 2x + c \Rightarrow -1 = 3(2)^2 - 2(2) + c \Rightarrow -1 = 12 - 4 + c \Rightarrow -1 = 8 + c \therefore c = -9$$

$$\therefore y' = 3x^2 - 2x - 9 \Rightarrow y = \int f'(x)dx \Rightarrow y = \int (3x^2 - 2x - 9)dx \Rightarrow y = \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 9x + c_1$$

$$y = x^3 - x^2 - 9x + c_1 \Rightarrow 5 = (2)^3 - (2)^2 - 9(2) + c_1 \Rightarrow 5 = 8 - 4 - 18 + c_1 \Rightarrow 5 = -14 + c \therefore c_1 = 19$$

معادلة المنحني هي $y = x^3 - x^2 - 9x + 19$

4- منحني يمر بالنقطتين $(2, -3)$ ، $(-1, 9)$ وميله عند (x, y) يساوي $ax - 5$ جد معادلته

الحل :-

$$y = \int f'(x)dx \Rightarrow y = \int (ax - 5)dx \Rightarrow y = \frac{ax^2}{2} - 5x + c$$

$$9 = \frac{a(-1)^2}{2} - 5(-1) + c \Rightarrow 9 = \frac{a}{2} + 5 + c \Rightarrow 4 = \frac{a}{2} + c .. \times 2 \Rightarrow 8 = a + 2c ......(1)$$

$$-3 = \frac{a(2)^2}{2} - 5(2) + c \Rightarrow 9 = 2a - 10 + c \Rightarrow 9 + 10 = 2a + c ...... \times 2 \Rightarrow 38 = 4a + 2c ......(2)$$

$$8 = a + 2c ....(1)$$

$$\mp 38 = \mp 4a \mp 2c ....(2)$$

$$-30 = -3a \Rightarrow a = 10 ...... 8 = 10 + 2c \Rightarrow 8 - 10 = 2c \Rightarrow c = -1$$

معادلة المنحني هي $y = \frac{10x^2}{2} - 5x - 1 \Rightarrow y = 5x^2 - 5x - 1$

5- اذا كانت دالة الأيراد الحدي هي :

$$M' = 12 - 8v + v^2$$

فأوجد دالة الايراد الكلي ودالة الطلب (السعر) بفرض ان ما ينتج يباع .

الحل :-

$$M = \int (12 - 8v + v^2)dv \Rightarrow M = 12v - 4v^2 + \frac{v^3}{3} + c \Rightarrow 0 = 12(0) - 4(0)^2 + \frac{(0)^3}{3} + c$$

$$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow M = 12v - 4v^2 + \frac{v^3}{3}$$

دالة السعر $= \dfrac{12v - 4v^2 + \frac{v^3}{3}}{v}$

$$= 12 - 4v + \frac{v^2}{3}$$

6- اذا كانت دالة التكلفة الحدية هي :

$$T' = 1000 - 5v$$

حيث v حجم الانتاج ، فاوجد دالة التكلفة الكلية مع العلم ان التكلفة الثابتة = 150 .

الحل :-

$$T = \int (1000 - 5v)dv \Rightarrow T = 1000v - \frac{5v^2}{2} + c \Rightarrow 65 = 1000(0) - \frac{5(0)2}{2} + c$$

$$\Rightarrow c = 65 \Rightarrow T = 1000v - \frac{5v^2}{2} + 65$$

[4-4] التكامل المحدد The Definite Integral

يعتبر التكامل المحدد من اهم مواضيع الرياضيات التطبيقية لما له من تطبيقات كثيرة في مختلفة العلوم.
في هذا البند سنعطي النظرية الاساسية للتكامل وبعض تطبيقات المساحات والحجوم.

النظرية الاساسية للتكامل
The Fundamental Theorem of Calculus

اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a, b]$ وكانت $F(x)$ عكس مشتقة $f(x)$ اي ان $F'(x) = f(x)$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

يطلق على a الحد الاسفل وعلى b الحد الاعلى للتكامل.

ملاحظة : قواعد التكامل المحدد هي نفس قواعد التكامل غير المحدد .

امثلة جد قيمة التكاملات الآتية :

1) $$\int_1^2 (3x^2 + 2x - 2)\,dx = \left[\frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 2x\right]_1^2$$

$$= [x^3 + x^2 - 2x]_1^2$$

$$= [8 + 4 - 4] - [1 + 1 - 2] = 8$$

2) $$\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 16}}\,dx = \int_0^3 (x^2 + 16)^{\frac{-1}{2}}(2x)\,dx$$

$$= \left[\frac{(x^2 + 16)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = \left[2\sqrt{x^2 + 16}\right]_0^3$$

$$= [2\sqrt{9 + 16}] - [2\sqrt{0 + 16}] = 2$$

3) $$\int_4^0 x(x - 1)(x - 2)\,dx = -\int_0^4 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^4$$

$$= -[64 - 64 + 16] + [0] = -16$$

لاحظ : $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

4) $\int_{1}^{125} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \int_{1}^{125} (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}\, x^{\frac{-2}{3}}\, dx$

$$= 3\int_{1}^{125} (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}\, \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}\, dx$$

$$= [\, 3 \,.\, \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \,]_{1}^{125}$$

$$= [\, 2\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^3}\,]_{1}^{125}$$

$$= [\, 2\sqrt{(\sqrt[3]{125}-1)^3}\,] - 2\sqrt{(\sqrt[3]{1}-1)^3}\,]$$

$$= 16 - 0 = 16$$

5) $\int_{1}^{4} (\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x})\, dx = \int_{1}^{4} (x^{\frac{-1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})\, dx$

$$= [\, 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,]_{1}^{4}$$

$$= [2\sqrt{4} + \frac{2}{3}\sqrt{(4)^3}\,] - [\, 2 + \frac{2}{3}] = \frac{20}{3}$$

6) جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_{0}^{a} (2x-1)\, dx = 42$

$$\int_{0}^{a} (2x-1)\, dx = 42$$

$$[\, x^2 - x\,]_{0}^{a} = 42 \Rightarrow [\, a^2 - a\,] - [\, 0\,] = 42$$

$$a^2 - a - 42 = 0 \Rightarrow (a-7)(a+6) = 0$$

$a = 7$ or $a = -6$ يهمل

7) $\int_{-6}^{-5} \sqrt[3]{x^2 + 12x + 36}\, dx$

$$\int_{-6}^{-5} \sqrt[3]{(x+6)^2}\, dx \Rightarrow \int_{-6}^{-5} (x+6)^{\frac{2}{3}}\, dx$$

$$= [\, \frac{(x+6)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\,]_{-6}^{-5} = [\, \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+6)^5}\,]_{-6}^{-5}$$

$$= [\frac{3}{5}\sqrt[3]{(-5+6)^5}\,] - [\frac{3}{5}\sqrt[3]{(-6+6)^5}\,]$$

$$= [\frac{3}{5}] - [\, 0\,]$$

$$= \frac{3}{5}$$

مثال ١ : احسب التكامل التالي $\int_1^2 xdx$.

الحل : $\int_1^2 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

مثال ٢ : احسب التكامل التالي $\int_0^3 (x^3 - 4x + 1)dx$.

الحل :

$$\int_0^3 (x^3 - 4x + 1)dx = \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} + x\right)\right|_0^3$$
$$= \left(\frac{3^4}{4} - \frac{4\times 3^2}{2} + 3\right) - (0 - 0 + 0)$$
$$= \frac{81}{4} - 18 + 3 = \frac{81}{4} - 15 = \frac{81-60}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

$$\int_{-2}^{2} 4x^4 - x^2 + 1dx = 2\int_0^2 4x^4 - x^2 + 1dx$$
$$= 2\left.\left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x\right)\right|_0^2$$
$$= \frac{748}{15}$$

$$\int_{10}^{22} f(x)\,dx = \int_{10}^{22} 6\,dx$$
$$= 6x|_{10}^{22}$$
$$= 132 - 60$$
$$= 72$$

مثال : احسب قيمة التكامل

$$= \int_0^2 (\sqrt{x})dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)dx$$
$$= \left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 + \left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4$$
$$= [\tfrac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}) - 0] + [(\tfrac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}}) - 8 + 8) - (\tfrac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}) - 2 + 4)]$$
$$= \tfrac{2}{3}(8) - 2$$
$$= \tfrac{10}{3}$$

مثال : احسب قيمة التكامل

$$= \int_0^2 (-y^2 + y + 2)dy$$
$$= \left[-\tfrac{y^3}{3} + \tfrac{y^2}{2} + 2y\right]_0^2$$
$$= (2 + 4 - \tfrac{8}{3} - (0)$$
$$= \tfrac{10}{3}$$

مثال : احسب قيمة التكامل

$$\int_1^2 [4 - x^2]\,dx = [4x - (1/3)x^3]_1^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}.$$

مثال : احسب قيمة التكامل

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

مثال : احسب قيمة التكامل

$$\int_0^1 [x - x^2]\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

مثال : احسب قيمة التكامل

$$\int_0^1 [(x^3-2x^2)-(x^2-2x)]\,dx+\int_1^2 [(x^2-2x)-(x^3-2x^2)]\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1+\left[x^3-\frac{x^4}{4}-x^2\right]_1^2=\left(\frac{1}{4}-1+1\right)-0+\left(8-\frac{16}{4}-4\right)-\left(1-\frac{1}{4}-1\right)=\frac{1}{2}$$

١ . احسب كلاً من التكاملات الآتية :

$$a)..\int_{-2}^{2}(3x-2)dx=[\frac{3x^2}{2}-2x]_{-2}^{2}=[\frac{3(2)^2}{2}-2(2)]-[\frac{3(-2)^2}{2}-2(-2)]=[6-4]-[6+4]=2-10=-8$$

$$b)..\int_{1}^{2}(x^{-2}+2x+1)dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{2x^2}{2}+x\right]_1^2=\left[\frac{-1}{x}+x^2+x\right]_1^2=\left[\frac{-1}{2}+(2)^2+2\right]-\left[\frac{-1}{1}+(1)^2+1\right]$$

$$=\left[\frac{-1}{2}+6\right]-[-1+2]=\frac{-11}{2}-1=\frac{-13}{2}$$

$$c)..\int_{1}^{3}(x^4+4x)dx=\left[\frac{x^5}{5}+\frac{4x^2}{2}\right]_1^3=\left[\frac{(3)^5}{5}+2(3)^2\right]-\left[\frac{(1)^5}{5}+2(1)^2\right]=\left[\frac{243}{5}+18\right]-\left[\frac{1}{5}+2\right]$$

$$=\left[\frac{243}{5}-\frac{1}{5}\right]+[18-2]=\frac{242}{5}+16=\frac{322}{5}$$

$$d)..\int_{3}^{2}\frac{x^3-1}{x-1}dx=\int_{3}^{2}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}dx=-\int_{2}^{3}(x^2+x+1)dx=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3$$

$$=-\left[(\frac{27}{3}+\frac{9}{2}+3)-(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2)\right]=-[(12+\frac{9}{2})-(4+\frac{8}{3})]=-[\frac{33}{2}-\frac{20}{3}]=-\frac{59}{6}$$

$$e)..\int_{1}^{3}\frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}dx=\int_{1}^{3}(\frac{2x^3}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2})dx=\int_{1}^{3}(2x-4+5x^{-2})dx$$

$$=\left[x^2-4x-\frac{5}{x}\right]_1^3=\left[9-12-\frac{5}{3}\right]-[1-4-5]=-3-\frac{5}{3}+8=5-\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$$

$$f)..\int_{1}^{4}(x-2)(x^2+2x+1)dx=\int_{1}^{4}(x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2)dx=\int_{1}^{4}(x^3-3x-2)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}-2x\right]_1^4=\left[\frac{(4)^4}{4}-\frac{3(4)^2}{2}-2(4)\right]-\left[\frac{(1)^4}{4}-\frac{3(1)^2}{2}-2(1)\right]=\frac{129}{4}$$

$$g)..\int_{2}^{3}\frac{x^4-1}{x-1}dx=\int_{2}^{3}\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-1)}dx=\int_{2}^{3}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)}dx$$

$$=\int_{2}^{3}(x^2+1)(x+1)dx=\int_{2}^{3}(x^3+x^2+x+1)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3$$

$$=\left[\frac{(3)^4}{4}+\frac{(3)^3}{3}+\frac{(3)^2}{2}+3\right]-\left[\frac{(2)^4}{4}+\frac{(2)^3}{3}+\frac{(2)^2}{2}+2\right]=\frac{147}{4}-\frac{32}{3}=\frac{313}{12}$$

تمارين (4-3)

جد تكاملات كلا مما يأتي :

1) $\int (2x+5)(x+1)\,dx$

الحل :-

$$\int (2x+5)(x+1)dx = \int (2x^2+2x+5x+5)dx = \int (2x^2+7x+5)dx$$

$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 5x + c$$

2) $\int_{-1}^{1} (x^2+3)(x-2)\,dx$

$$= \int_{-1}^{1} (x^2+3)(x-2)dx = \int_{-1}^{1} (x^3-2x^2+3x-6)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 6x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{2(1)^3}{3} + \frac{3(1)^2}{2} - 6(1)\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{2(-1)^3}{3} + \frac{3(-1)^2}{2} - 6(-1)\right] = 0$$

3) $\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+5)\,dx$

$$\int \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+5\right)dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+5)dx = \int (x+5x^{\frac{1}{2}})dx = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{x^2}{2} + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

4) $\int_{0}^{4} \sqrt{x}(x+1)^2\,dx$

$$\int_{0}^{4} \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2 dx = \int_{0}^{4} x^{\frac{1}{2}}(x+x^{\frac{1}{2}}+1)dx = \int_{0}^{4} (x^{\frac{3}{2}}+x+x^{\frac{1}{2}})dx$$

$$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{4} = \left[\frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} + \frac{(4)^2}{2} + \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right] - [0] = \frac{392}{15}$$

5) $\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2\,dx$

$$\int \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2 dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+2)^2 dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x+4x^{\frac{1}{2}}+4)dx$$

$$= \int (x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}})dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{4x^2}{2} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^2 + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

6) $\int_{-1}^{0} \frac{x^3-27}{x-3}\,dx$

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^3-27}{x-3}dx = \int_{-1}^{0} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)}dx = \int_{-1}^{0} (x^2+3x+9)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x\right]_{-1}^{0}$$

$$= \left[(0) - (\frac{-1}{3} + \frac{3}{2} - 9)\right] = [-(\frac{7}{6} - \frac{9}{1})] = -[\frac{-47}{6}] = \frac{47}{6}$$

7) $\int \frac{x^4 - 1}{x - 1}\, dx$

$$= \int \frac{x^4 - 1}{x - 1} dx = \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-1)} dx = \int \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)} dx$$

$$= \int (x^2+1)(x+1) dx = \int (x^3 + x^2 + x + 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c \right]$$

8) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$= \int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^1 2x(x^2+1)^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}]_0^1 = (1+1)^{\frac{1}{2}} - (0+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} - 1$$

9) $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}}$

$$= \int \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}\int (3x^2+3)(x^3+3x+1)^{\frac{-1}{3}} dx = \frac{1}{3} \times \frac{(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{1}{2}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

10) $\int_0^3 \sqrt[3]{(3x - 1)^2}\, dx$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 3(3x-1)^{\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{3} \times \frac{(x^2-1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}]_0^3 = \frac{1}{5}[(9-1)^{\frac{5}{3}} - (0-1)^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}[32+1] = \frac{33}{5}$$

11) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

$$= \int \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right) dx = \int (x^{\frac{-1}{3}} + x^{\frac{-1}{3}}) dx = \int (2x^{\frac{-1}{3}}) dx = \frac{2x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = 3x^{\frac{2}{3}} + c$$

12) $\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}}{\sqrt{x}}\, dx$

$$= \int \frac{(x^{\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = 2\int \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} (x^{\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{1}{3}} dx = 2\frac{(x^{\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sqrt{x} - 1)^4} + c$$

13) $\int \frac{x^4}{\sqrt[5]{a^2 x^5 + b^2}}\, dx$

$$= \int \frac{x^4}{(a^2x^5 + b^2)^{\frac{1}{5}}} dx = \frac{1}{5a^2}\int 5a^2x^4(a^2x^5+b^2)^{\frac{-1}{5}} dx = \frac{1}{5a^2} \times \frac{(a^2x^5+b^2)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$$

$$= \frac{1}{4a^2}(a^2x^5+b^2)^{\frac{4}{5}} + c$$

14) $\int_{0}^{8} \sqrt{x^2 - 14x + 49}$

$$= \int_{0}^{8} \sqrt{(x-7)(x-7)}\,dx = \int_{0}^{8} \sqrt{(x-7)^2}\,dx = \int_{0}^{8} (x-7)\,dx = [\frac{x^2}{2} - 7x]_0^8$$

$$= (\frac{8^2}{2} - 7 \times 8) - (0) = 32 - 48 = -16$$

15) $\int \frac{dx}{4x^2 - 12x + 9}$

$$= \int \frac{dx}{(2x-3)(2x-3)} = \int (2x-3)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2(2x-3)^{-2}\,dx = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-3)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{2(2x-3)} + c$$

16) $\int_{-1}^{1} \sqrt[5]{3x^5 - 2x^7}\,dx$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt[5]{x^5(3-2x^2)}\,dx = \int_{-1}^{1} x\sqrt[5]{3-2x^2}\,dx = \frac{-1}{4}\int_{-1}^{1} -4x(3-2x^2)^{\frac{1}{5}}\,dx = \frac{-1}{4} \times \frac{(3-2x^2)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{-5}{24}[(3-2\times 1^2)^{\frac{6}{5}} - (3-2\times(-1)^2)^{\frac{6}{5}}] = \frac{-5}{24}[1-1] = 0$$

17) $\int \sqrt[3]{2x^5 - 7x^3}\,dx$

$$= \int \sqrt[3]{x^3(2x^2-7)}\,dx = \int x\sqrt[3]{2x^2-7}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2-7)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{4} \times \frac{(2x^2-7)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{16}(2x^2-7)^{\frac{4}{3}} + c$$

[4-5] المساحة تحت المنحني

من التطبيقات المهمة للتكامل المحدد هو ايجاد المساحة تحت منحني الدالة $y = f(x)$ حيث $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$.

[4-5-1] المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x)$ ومحورالسينات x-axis والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$

مثال 1

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1,3]$.

الحل

تقاطع المنحني مع محورالسينات اي نجعل $y = 0$ لمعرفة $f(x) > 0$ أو $f(x) < 0$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 ,\ x = -1$$

الموقع	اشارة $f(x)$	$x \in$ للفترة	الفترة
تحت	$(0)^2 - 2(0) - 3 = -3 < 0$	$x = 0$	$[-1,3]$

$$A = -\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\,dx = [-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x]_{-1}^{3}$$

$$= [-9 + 9 + 9] - [\frac{1}{3} + 1 - 3]$$

$$= [9] - [\frac{-5}{3}] = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}\text{unit}^2$$

مثال 2

جد المساحة المحددة بالدالة $y = f(x) = x^3 - x$ ومحور السينات .

الحل التقاطع مع محورالسينات $\Leftarrow y = 0$

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = -1 \ , \ x = 1$$

الموقع	اشارة $f(x)$	للفترة $x \in$	الفترة
فوق	$-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} > 0$	$x = -\frac{1}{2}$	$[-1,0]$
تحت	$\frac{1}{8} - \frac{1}{2} < 0$	$x = \frac{1}{2}$	$[0,1]$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0}(x^3 - x)\ dx + \int_{0}^{1}(-x^3 + x)\ dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= [0] - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] - [0] = \frac{1}{2}\ \text{unit}^2$$

مثال 3

جد المساحة المحددة بالدالة $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$

الحل التقاطع ; وان $y = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow -1 \notin [0,3]$

الموقع	اشارة $f(x)$	للفترة $x \in$	الفترة
فوق	$\sqrt{1+1} = \sqrt{2} > 0$	$x = 1$	$[0,3]$

$$A = \int_{0}^{3}(x+1)^{\frac{1}{2}}\ dx \Rightarrow A = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_{0}^{3}$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(4)^3}\right] - \left[\frac{2}{3}\sqrt{(1)^3}\right]$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} = 4\ \frac{2}{3}\ \text{unit}^2$$

مثال : جد المساحة المحددة بين المنحني $f(x) = 4 - x^2$ والمحور x على الفترة [-2,2]

الحل: $4 - x^2 = 0$ أي قيم $x = \pm 2$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx \\ &= \left[4x - \tfrac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} \\ &= [(8 - \tfrac{8}{3}) - (-8 + \tfrac{8}{3})] \\ &= 16 - \tfrac{16}{3} \\ &= \tfrac{32}{3} \end{aligned}$$

مثال : جد المساحة المحددة بين المنحني $f(x) = 3 - x$ والمحور x على الفترة $[0,5]$

الحل: $3 - x = 0$ أي قيم $x = 3$

$$Area = \int_0^3 [(3-x)-0]dx + \int_3^5 [0-(3-x)]dx = \int_0^3 (3-x)\,dx - \int_3^5 (3-x)\,dx$$

$$= \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^3 - \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_3^5$$

$$= \left[\left(3(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right) - \left(3(0) - \frac{1}{2}(0)^2\right)\right] - \left[\left(3(5) - \frac{1}{2}(5)^2\right) - \left(3(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right)\right]$$

$$= \left[\left(9 - \frac{9}{2}\right) - 0\right] - \left[\left(15 - \frac{25}{2}\right) - \left(9 - \frac{9}{2}\right)\right] = \frac{9}{2} - \left(\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\right) = \frac{13}{2} = 6.5$$

مثال – 1-

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,2]$.

الحل

الخطوة الاولى : نجعل

$$f(x) = 0$$

$$\therefore x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x-2)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad , \quad x = 2 \quad , \quad x = -2$$

الخطوة الثانية : فترات التكامل هي : $[-2,0]$ ، $[0,2]$

الخطوة الثالثة :

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - [4-8] = 4$$

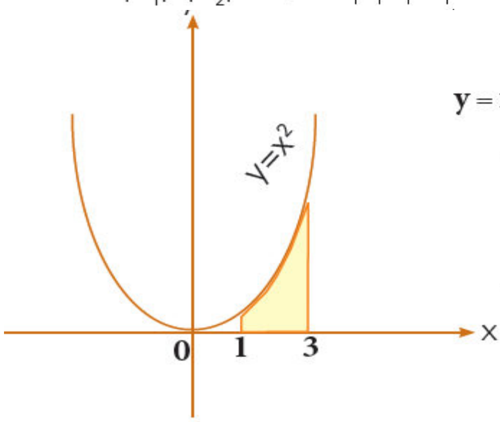
$$A_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2} = [4-8] - 0 = -4$$

الخطوة الرابعة : جمع القيم المطلقة للتكاملات

$A = |A_1| + |A_2| \Rightarrow A = |4| + |-4| = 4 + 4 = 8$ وحدة مربعة

مثال – 2-

جد مساحة المنطقة التي يحدها مخطط الدالة $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x = 1 , x = 3$.



الشكل (4-24)

الحل

نقاطع الدالة مع محور السينات بجعل $y = 0$.

$$\therefore x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,3]$$

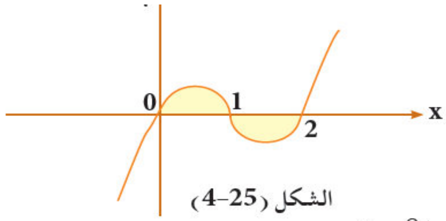
$\therefore$ لا تجزئة لفترة التكامل

$\because f(x) \geq 0 , \; x \in [1,3]$

$$A = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$ وحدة مساحة

مثال – 3–

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات.



الشكل (4–25)

الحل

نبحث عن نقاط التقاطع مع محور السينات أي عندما $y = 0$

$$\therefore x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0, x = 1, x = 2$$

$\therefore$ فترات التكامل هنا : $[0,1]$ ، $[1,2]$

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1$$

$$A_1 = (\frac{1}{4} - 1 + 1) - (0) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2$$

$$A_2 = (4 - 8 + 4) - (\frac{1}{4} - 1 + 1) = -\frac{1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$\therefore A = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ وحدة مساحة

مثال – 4–

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 3]$.

الحل

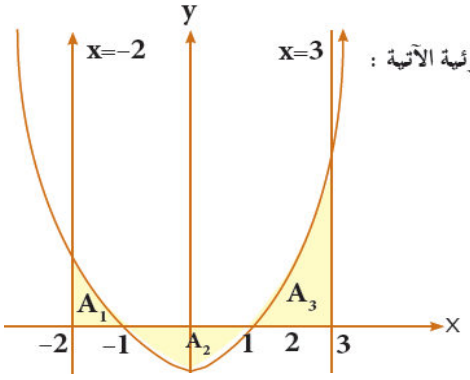
نجد تقاطع المنحني مع محور السينات

$$x^2 - 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm 1 \in [-2, 3]$$

$\therefore$ نجزيء فترة التكامل الى الفترات الجزئية الآتية :

$[-2,-1]$ ، $[-1,1]$ ، $[1,3]$



نجد التكاملات :

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1}$$

$$A_1 = \left[\frac{-1}{3} + 1\right] - \left[\frac{-8}{3} + 2\right] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A_2=\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}$$

$$A_2=\left[\frac{1}{3}-1\right]-\left[\frac{-1}{3}+1\right]=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$$

$$A_3=\int_{1}^{3}(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{3}$$

$$A_3=[9-3]-[\frac{1}{3}-1]=6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$$

$$\therefore A=\left|\frac{4}{3}\right|+\left|-\frac{4}{3}\right|+\left|\frac{20}{3}\right|=9\frac{1}{3}$$ وحدة مساحة

1. جد المساحة المحددة بالمنحني $y=x^3-x$ ومحور السينات والمستقيمين $x=1$, $x=-1$.

الحل :

نجد أولا نقاط التقاطع مع المحور x

$$x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0\in[-1,1].....x=\mp1\in[-1,1]$$

أي أن فترات التكامل هي [0,1] , [-1,0]

$$A_1=\left|\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx\right|=\left|[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}]_{-1}^{0}\right|=\left|0-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})\right|=\left|\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$$

$$A_2=\left|\int_{0}^{1}(x^3-x)dx\right|=\left|[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}]_{0}^{1}\right|=\left|(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})-0\right|=\left|\frac{-1}{4}\right|=\frac{1}{4}$$

$$A=A_1+A_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

2. جد المساحة المحددة بالدالة $f(x)=x^4-3x^2-4$ وعلى الفترة $[-2,3]$ ومحورالسينات .

الحل :

نجد أولا نقاط التقاطع مع المحور x

$$x^4-3x^2-4=0\Rightarrow(x^2-4)(x^2+1)=0\Rightarrow x=\mp2\in[-2,3]$$

أي أن فترات التكامل هي [2,3] , [-2,2]

$$A_1=\int_{-2}^{2}(x^4-3x^2-4)dx=[\frac{x^5}{5}-x^3-4x]_{-2}^{2}=(\frac{32}{5}-8-16)-(\frac{-32}{5}+8+16)=\frac{32}{5}-24+\frac{32}{5}-24$$

$$=\frac{64}{5}-48=\frac{64-240}{5}=\frac{-176}{5}$$

$$A_2=\int_{2}^{3}(x^4-3x^2-4)dx=[\frac{x^5}{5}-x^3-4x]_{2}^{3}=(\frac{243}{5}-27-12)-(\frac{32}{5}-8-16)=\frac{243}{5}-39-\frac{32}{5}+24$$

$$=\frac{211}{5}-15=\frac{211-75}{5}=\frac{136}{5}$$

$$A=|A_1|+|A_2|=\frac{176}{5}+\frac{136}{5}=\frac{312}{5}$$

3. جد المساحة المحددة بالدالة $f(x)=x^4-x^2$ ومحور السينات.

الحل :

نجد أولا نقاط التقاطع مع المحور x

$$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \mp 1 \in [-1,1]$$

أي أن فترات التكامل هي [0,1] , [-1,0]

$$A_1 = \int_{-1}^{0}(x^4 - x^2)dx = [\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}]_{-1}^{0} = (0) - (\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{-2}{15}$$

$$A_1 = \int_{0}^{1}(x^4 - x^2)dx = [\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}]_{0}^{1} = (\frac{1}{5} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{-2}{15}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

10 . جد المساحة المحددة بالدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات.

الحل :

نجد أولا نقاط التقاطع مع المحور x

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x+3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0,-3,-1$$

أي أن فترات التكامل هي [-1,0] , [-3,-1]

$$A_1 = \int_{-3}^{-1}(x^3 + 4x^2 + 3)dx = [\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}]_{-3}^{-1} = (\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}) - (\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2}) = \frac{5}{12} + \frac{9}{4} = \frac{8}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{0}(x^3 + 4x^2 + 3)dx = [\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}]_{-1}^{0} = 0 - (\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}) = \frac{-5}{12}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$$

[4-5-2] المساحة بين منحني دالتين

مثال 4

جد المساحة المحددة بين منحنى الدالتين $y = f(x) = x$ ، $y = g(x) = x^3$.

الحل

نولد الدالة الجديدة ولتكن :

$$R(x) = f(x) - g(x)$$
$$R(x) = x - x^3$$

نقاط الدالة $R(x)$ مع محور السينات $\Leftarrow$ $y = 0$

$$x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = \mp 1$$

$[-1,0]$, $[0,1]$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0}(x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1}(-x^3 + x)\,dx$$

$$= [\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^{0} + [-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}]_{0}^{1}$$

$$= [0] - [\frac{1}{4} - \frac{1}{2}] + [-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}] - [0] = \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$

مثال 5

لتكن $y = f(x) = x$ وعلى الفترة $[-1,1]$ ، $y = g(x) = \sqrt[3]{x}$ وعلى الفترة $[-1,1]$ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين .

الحل نولد الدالة $R(x)$ حيث :

$$R(x) = f(x) - g(x)$$

$$R(x) = x - \sqrt[3]{x}$$

التقاطع : $y = 0 \Rightarrow x - \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0$

$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = \mp 1$$

$$[-1,0] \ , \ [0,1]$$

الموقع	اشارة $f(x)$	للفترة $x \in$	الفترة
فوق	$\frac{-1}{8} - \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} > 0$	$x = \frac{-1}{8}$	$[-1,0]$
تحت	$\frac{1}{8} - \sqrt[3]{\frac{1}{8}} < 0$	$x = \frac{1}{8}$	$[0,1]$

$$A = \int_{-1}^{0} [x - x^{\frac{1}{3}}]\, dx + \int_{0}^{1} [x^{\frac{1}{3}} - x]\, dx$$

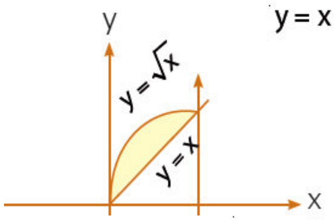
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= [0] - \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right] + \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right] - [0]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \ \text{unit}^2$$

مثال -1-

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$



الحل

نجد تقاطع المنحنيين: $\sqrt{x} = x$

$$\therefore x = x^2 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

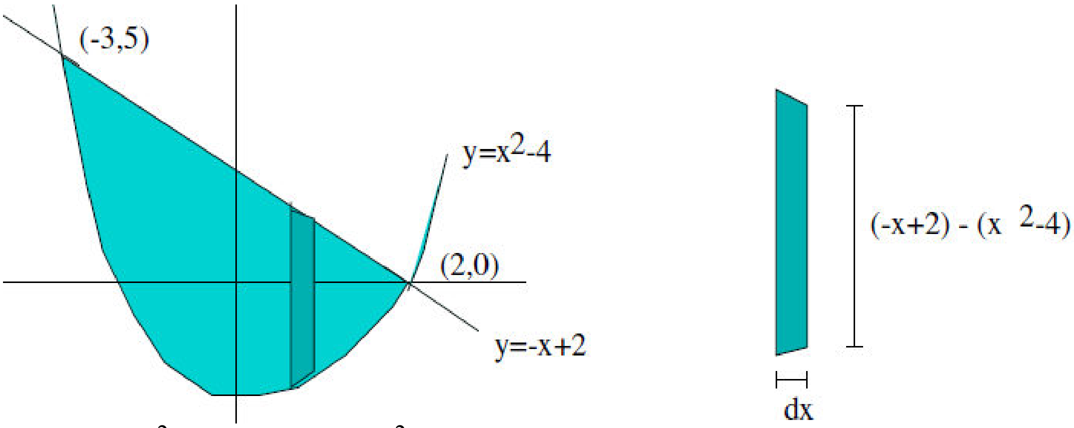
$$\therefore x = 0, x = 1 \Rightarrow x \in [0,1]$$

$$A = \int_{0}^{1} (\sqrt{x} - x)dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right] - [0] = \frac{1}{6}$$

$\therefore A = \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$ وحدة مساحة

مثال : جد المساحة المحددة بين المنحنيين $f(x) = x^2-4$. $g(x) = -x + 2$

الحل :



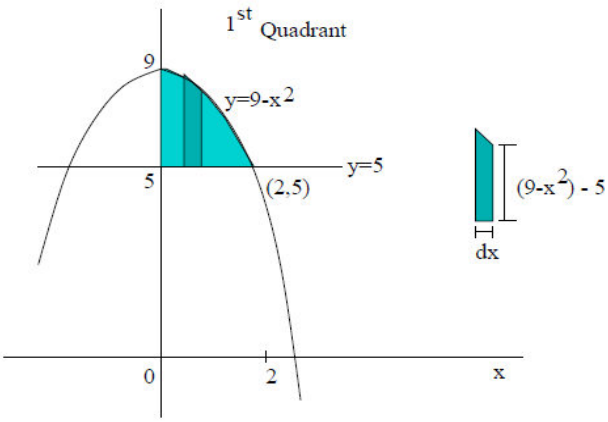
$x^2-4= -x + 2 \rightarrow x^2+x-6 = 0 \rightarrow (x+3)(x-2) = 0\rightarrow x = -3 \ , \ x = 2 \ [-3,2]$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{2}(-x^2 - x + 6)dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^{2} \\ &= [(-\tfrac{8}{3} - 2 + 12) - (9 - \tfrac{9}{2} - 18)] \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$

مثال : جد المساحة المحددة بين المنحنيين $f(x) = 9- x^2$. $g(x) = 5$

الحل :

$9-x^2= 5 \rightarrow 4- x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \ [-2,2]$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} \\ &= [(8 - \tfrac{8}{3}) - (-8 + \tfrac{8}{3})] \\ &= 16 - \frac{16}{3} \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

مثال : جد المساحة المحددة بين المنحنيين $f(x) = x^2+1$, $g(x) = x - 1$ على الفترة $[1,3]$

الحل : $x^2+1= x - 1 \rightarrow x^2-x+2=0$ إذاً لا توجد قيم تقطع محور x

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^3 [f(x) - g(x)]dx \\
&= \int_1^3 [(x^2+1) - (x-1)]dx \\
&= \int_1^3 [(x^2 - x + 2)]dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^3 \\
&= [(9 - \frac{9}{2} + 6) - (\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2)] \\
&= \frac{21}{2} - \frac{11}{6} \\
&= \frac{26}{3}
\end{aligned}
$$

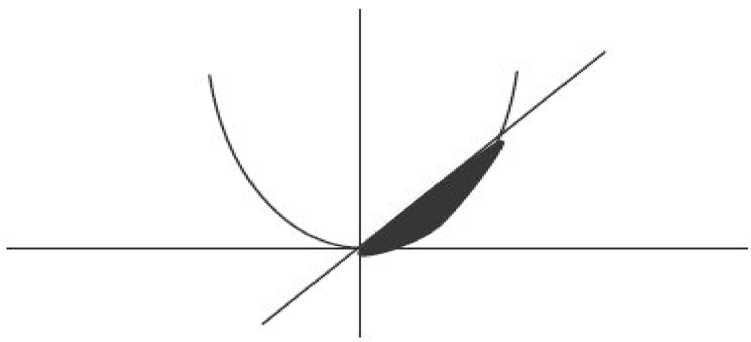
مثال : جد المساحة المحددة بين المنحنيين $f(x) = x^2+1$, $g(x) = x - 1$ على الفترة $[1,3]$

الحل : $x^2+1= x - 1 \rightarrow x^2-x+2=0$ إذاً لا توجد قيم تقطع محور x

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^3 [f(x) - g(x)]dx \\
&= \int_1^3 [(x^2+1) - (x-1)]dx \\
&= \int_1^3 [(x^2 - x + 2)]dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^3 \\
&= [(9 - \frac{9}{2} + 6) - (\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2)] \\
&= \frac{21}{2} - \frac{11}{6} \\
&= \frac{26}{3}
\end{aligned}
$$

مثال : جد المساحة المحددة بين المنحنيين $f(x) = x^2$, $g(x) = x$

الحل : $x^2 = x \rightarrow x^2-x=0 \rightarrow x(x-1)=0 \rightarrow x = 0 , x = 1$



المساحة تساوي

$$\int_0^1 [x - x^2]\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

تمارين (4-4)

1- جد المساحة بين منحني الدالة $f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x=2$, $x=-2$ حيث

$y=f(x)=x^3-4x$

الحل :ـ نجد أولا نقاط التقاطع مع المحور x

$$x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0 \Rightarrow x(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=0.x=\mp 2 \in [-2,2]$$

أي أن فترات التكامل هي [0,1] , [-1,0]

$$A_1=\left|\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx\right|=\left|[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^2}{2}]_{-2}^{0}\right|=\left|0-(\frac{16}{4}-2(4))\right|=|-4+8|=4$$

$$A_2=\left|\int_{0}^{2}(x^3-4x)dx\right|=\left|[\frac{x^4}{4}-2x^2]_{0}^{2}\right|=\left|(\frac{16}{4}-2(4))-0\right|=|4-8|=4$$

$$A=A_1+A_2=4+4=8$$

2- جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y=f(x)=x^4-x^2$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1,1]$

الحل :

نجد أولا نقاط التقاطع مع المحور x

$$x^4-x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0, x=\mp 1 \in [-1,1]$$

أي أن فترات التكامل هي [0,1] , [-1,0]

$$A_1=\int_{-1}^{0}(x^4-x^2)dx=[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}]_{-1}^{0}=(0)-(\frac{-1}{5}+\frac{1}{3})=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{-2}{15}$$

$$A_1=\int_{0}^{1}(x^4-x^2)dx=[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}]_{0}^{1}=(\frac{1}{5}-\frac{1}{3})=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{-2}{15}$$

$$A=|A_1|+|A_2|=\frac{2}{15}+\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$$

3- جد المساحة المحددة بالدالة $y=f(x)=x^3-3x^2+2x$ ومحور السينات.

الحل :

نجد أولا نقاط التقاطع مع المحور x

$$x^3-3x^2+2x=0 \Rightarrow x(x-2)(x-1)=0 \Rightarrow x=0, x=2, x=1$$

أي أن فترات التكامل هي [1,2] , [0,1]

$$A_1=\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)dx=[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2]_{0}^{1}=(\frac{1}{4}-1+1)-(0)=\frac{1}{4}$$

$$A_2=\int_{1}^{2}(x^3-3x^2+2x)dx=[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2]_{1}^{2}=(\frac{16}{4}-8+4)-(\frac{1}{4})=\frac{-1}{4}$$

$$A=|A_1|+|A_2|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

4- جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\frac{1}{2}x$ والمستقيمين

$x=5$, $x=2$

الحل :

$$R(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{2}x \Rightarrow \sqrt{x-1} = \frac{1}{2}x \Rightarrow x - 1 = \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

أي أن فترة هي [2,5]

$$A = \int_2^5 (x-1)^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_2^5 x dx = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}]_2^5 - \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2}]_2^5$$

$$= \frac{2}{3}[(5-1)^{\frac{3}{2}} - (2-1)^{\frac{3}{2}}] - [\frac{25}{4} - \frac{4}{4}] = \frac{2}{3}[8-1] - [\frac{21}{4}] = \frac{56-63}{12} = \frac{-9}{12} = \left|\frac{-3}{4}\right| = \frac{3}{4}$$

5- جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = x^2$, $y = x^4 - 12$

الحل :

$$R(x) = f(x) - g(x) = x^4 - 12 - x^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \mp 2$$

أي أن فترة هي [-2,2]

$$A = \int_{-2}^{2} (x^4 - x^2 - 12) dx = [\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 12x]_{-2}^{2} = [\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24] - [\frac{-32}{5} - \frac{-8}{3} + 24]$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48 = \frac{192-80}{15} - 48 = \frac{112}{15} - \frac{48}{1} = \frac{112-720}{15} = \frac{-608}{15} = \left|\frac{-608}{15}\right| = \frac{608}{15}$$

تم بعون الله طباعة أول ملزمة من تأليفي بتأريخ ٢٠١١\٢\٩ الساعة السابعة مساءً
وأعتذر لكم عن الأخطاء أن وجدت مدرس الرياضيات | إبراهيم عبد الله فرج | مدرس ثانوية الزاوية للبنين
وثانوية الزاوية للبنات | ملاحظة للإجابة على أسئلتكم واستفساراتكم يمكنكم الاتصال على الرقم
م \ ٠٧٧٠١٧٣٤٥٦٩ أو على الإميل Ibrahim.ali1972@yahoo.com